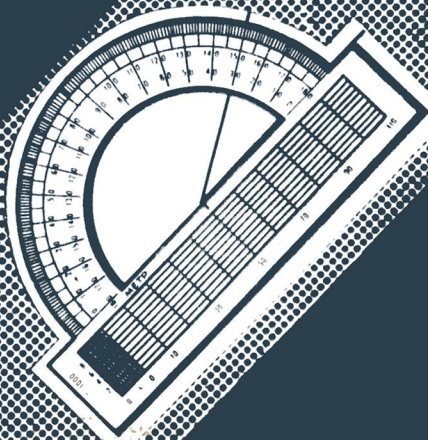


V. GUSEVAS, A. MORDKOVIČIUS
MATEMATIKA
Informacinė medžiaga



V. GUSEVAS, A. MORDKOVIČIUS

MATEMATIKA

Informacinė medžiaga

Mokymo priemonė mokiniams



ALGEBRA

5



GEOMETRIJA

159



PRIEDAI

239

**Scanned by
Cloud Dancing**



KAUNAS „ŠVIESA“ 1990

В. А. Гусев, А. Г. Мордкович
МАТЕМАТИКА
Справочные материалы
Учебное пособие для учащихся
Москва, «Просвещение», 1986

Vertė JUOZAS MAČYS

Originalą rekomendavo TSRS švietimo ministerijos
Vyriausioji mokyklų valdyba

Gusevas V., Mordkovičius A.

Gu 231 Matematika: Informacinė medžiaga. Mokymo priemonė mokiniams. Algebra. Geometrija. Priedai.— K.: Sviesa, 1990.— 256 p.: iliustr.
Dalykinė r-klė: 251—256 p.
ISBN 5—430—00390—5

Mokiniams skirtoje knygoje trumpai išdėstyti algebros ir planimetrijos mokyklinio kurso pagrindiniai skyriai. Ji padės mokiniams prisiminti, susisteminti ir įtvirtinti matematikos žinias.

G 4306020500—024 26—90
M853(10)—90

ББК 22.1
51

ISBN 5—430—00390—5 © Издательство «Просвещение», 1986
© Vertimas į lietuvių kalbą, Juozas Mačys, 1990

ZODIS MOKINIAMS

1. Kaip sudarytas šis žinynas?

Siame žinyne jūs rasite vidurinės mokyklos algebros ir planimetrijos kurso visų skyrių medžiagą: pagrindines sąvokas, apibrėžimus, aksiomas, teoremas, savybes ir t. t. Be to, žinyne detaliai išnagrinėta daug uždavinių ir pavyzdžių. Beje, juos sprendžiant remiamasi ne tik skyreliu, kuriame yra pavyzdys ar uždavinys, bet ir kitais skyreliais. Teoremų įrodymų dažniausiai nėra — juos galima rasti žemesniųjų klasių vadovėliuose. Čia pateikiame tik kai kuriuos įrodymus — svarbių samprotavimų pavyzdžius, kurių nėra mokykliniuose vadovėliuose.

Žinyne visa, kas susiję su viena ar kita sąvoka, pateikiama kompaktiškai, vienoje vietoje (mokykliniuose vadovėliuose dažnai daroma ne taip). Tai leis jums greitai rasti viską apie jus dominančią sąvoką.

Kai kuriuose skyreliuose pateikiama papildoma medžiaga, neįeinanti į vidurinės mokyklos matematikos kurso programą. Ta medžiaga praplės jūsų žinias apie kai kurias jums žinomas sąvokas. Tokie skyreliai pažymėti ženklų*.

2. Kam reikalingas matematikos žinynas?

Žinynas jums padės:

- 1) rasti reikiamų žinių apie tą ar kitą sąvoką, tą ar kitą mokyklinio matematikos kurso teoremą;
- 2) pakartoti atitinkamą medžiagą ruošiantis pamokai, kontroliniam darbui, egzaminui;
- 3) prisiminti, kaip sprendžiami mokyklinio matematikos kurso tipiniai uždaviniai ir pavyzdžiai;
- 4) pasiruošti stojamajam egzaminui į technikumą, profesinę technikos mokyklą ir kitas mokyklas.

3. Kaip naudotis žinynu?

Žinyną sudaro dvi dalys: I dalis — algebra, II dalis — geometrija. Kiekvienos dalies medžiaga suskirstyta skyriais: 7 algebros skyriai ir 7 geometrijos skyriai. Skyriai suskirstyti į paragrafus (20 algebros ir 15 geometrijos), o paragrafai į palyginti smulkius skyrelius (taip jums bus lengviau rasti reikiamą informaciją) — 160 algebros ir 54 geometrijos skyreliai. Skyriai, paragrafai ir skyreliai kiekvienoje dalyje numeruojami atskirai. Be to, žinyne

yra priedai — pagrindinės formulės ir dalykinė rodyklė — bei turinys.

Reikalingos informacijos ieškome taip: konkrečios sąvokos ieškome dalykinėje rodyklėje, tam tikros kurso temos — turinyje.

Paaškinsime, kaip naudotis dalykine rodykle. Sakykime, reikia rasti apskritimo apibrėžimą. Dalykinėje rodyklėje tarp žodžių, prasidedančių raide „A“, randate: Apskritimas 167 (tai reiškia, kad atitinkamas apibrėžimas yra 167 puslapyje). Dar vienas pavyzdys: reikia rasti begalinės dešimtainės periodinės trupmenos apibrėžimą. Ieškome pagal daiktavardį (vardininko linksnį) — trupmena, tarp žodžių, prasidedančių raide „T“. Trupmenų yra įvairių, visos jos dalykinėje rodyklėje eina po žodžio „Trupmena“. Ten rasite:

Trupmena

begalinė dešimtainė — 24

begalinė dešimtainė periodinė — 25

Tai reiškia, kad norimą sąvoką jūs rasite 25 puslapyje (žodį „trupmena“ atstoja brūkšnelis).

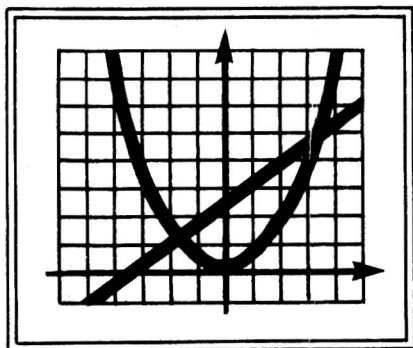
Analogiškai terminą „algebrinis racionalusis reiškiny“ rasite po žodžio „Reiškiny“, „statusis kampas“ — po žodžio „Kampas“, „modulio savybė“ — po žodžio „Savybės“ ir pan.

Jeigu vieną ar kitą skyrelį skaitysite ištiesai, tai tekste kartais taip pat rasite nuorodų į numerį puslapio ar skyrelio, kur apibrėžiama skyrelyje vartojama sąvoka. Patogumo dėlei aksiomos ir teoremos sunumeruotos. Geometrijos aksiomos sunumeruotos taip, kaip A. Pogorelovo „Geometrijoje, 7—12“. Teoremos numeruojamos taip: 5.3 t. reiškia, kad kalbama apie 5 skyriaus 3 teoremą.

Tikimės, kad žinynas taps jūsų geru draugu, ir linkime jums sėkmės.

Autoriai

ALGEBRA



I SKYRIUS. SKAICIAI

§ 1. Natūralieji skaičiai

1. Natūraliųjų skaičių žymėjimas 9
2. Aritmetiniai veiksmai su natūraliaisiais skaičiais 9
3. Dalyba su liekana 10
4. Dalumo požymiai 10
5. Natūraliojo skaičiaus skaidydymas pirminiais dauginamaisiais 12
6. Kelių natūraliųjų skaičių didžiausias bendrasis daliklis 13
7. Kelių natūraliųjų skaičių mažiausias bendrasis kartotinis 13
8. Raidžių vartojimas algebroje. Kintamieji 14

§ 2. Racionalieji skaičiai

9. Paprastosios trupmenos. Taisyklingosios ir netaisyklingosios trupmenos. Mišrieji skaičiai 15
10. Lygiosios trupmenos. Pagrindinė trupmenos savybė. Trupmenų prastinimas 16
11. Trupmenų bendravardiklinimas 16
12. Paprastųjų trupmenų aritmetiniai veiksmai 18
13. Dešimtainės trupmenos 19
14. Aritmetiniai veiksmai su dešimtainėmis trupmenomis 20

15. Procentai 23
16. Paprastosios trupmenos vertimas begaline dešimtaine periodine trupmena 24
17. Begalinės dešimtainės periodinės trupmenos vertimas paprastąja 25
18. Koordinatų tiesė 26
19. Racionaliųjų skaičių aibė .. 27

§ 3. Realieji skaičiai

20. Iracionalieji skaičiai 28
21. Realieji skaičiai. Skaičių tiesė 29
22. Skaičių aibių žymėjimas ... 29
23. Realiųjų skaičių palyginimas 29
24. Skaitinių nelygybių savybės 30
25. Skaičių intervalai 30
26. Realiojo skaičiaus modulis .. 32
27. Atstumo tarp dviejų koordinatų tiesės taškų formulė .. 32
28. Veiksmų su realiaisiais skaičiais taisyklės 33
29. Aritmetinių veiksmų su realiaisiais skaičiais savybės .. 33
30. Proporcijos 34
31. Laipsnis su natūraliuoju rodikliu 34
32. Laipsnis su nulinio rodiklio. Laipsnis su neigiamuoju sveikuoju rodikliu 35
33. Teigiamojo realiojo skaičiaus standartinė išraiška 35



34. Aritmetinės šaknies apibrėžimas	35	54. Racionaliųjų trupmenų bendravardiklinimas	51
35. Aritmetinių šaknų savybės	36	55. Racionaliųjų trupmenų sudėtis ir atimtis	53
36. Nelyginio laipsnio šaknis iš neigiamojo skaičiaus	37	56. Racionaliųjų trupmenų daugyba ir dalyba	53
37. Laipsnis su trupmeniniu rodikliu	37	57. Racionaliosios trupmenos kėlimas sveikuoju laipsniu	54
38. Laipsnių su racionaliaisiais rodikliais savybės	38	58. Racionaliųjų reiškinių pertvarkymas	55
39. Apytikslės skaičių reikšmės. Absoliučioji ir santykinė paklaidos	38		
40. Realiojo skaičiaus dešimtainiai artiniai su trūkumu ir su pertekliumi	40		
41. Kvadratinės šaknies iš natūraliojo skaičiaus traukimo taisyklė	40		

II SKYRIUS. ALGEBRINIAI REIŠKINIAI

§ 4. Pagrindinės sąvokos

42. Algebrainių reiškinių rūšys	42
43. Leistinosios kintamųjų reikšmės. Algebrainio reiškinio apibrėžimo sritis	43
44. Tapatusis reiškinio pertvarkymas. Tapatybė	43

§ 5. Sveikieji racionaliųjų reiškiniai

45. Vienanariai ir veiksmai su jais	44
46. Daugianariai. Daugianario standartinė išraiška	45
47. Greitosios daugybos formulės	46
48. Daugianarių skaidymas dauginamaisiais	47
49. Vieno kintamojo daugianariai	49
50. Kvadratinio trinarinio skaidymas tiesiniais dauginamaisiais	49
51. Dvinario kėlimas natūraliuoju laipsniu (Niutono binomas)	50

§ 6. Trupmeniniai racionaliųjų reiškiniai

52. Racionalioji trupmena ir jos pagrindinė savybė	50
53. Racionaliųjų trupmenų prastinimas	51

§ 7. Iracionalieji reiškiniai

59. Paprasčiausieji aritmetinių šaknų (radikalų) pertvarkymai	55
60. Tapatybė $\sqrt{a^2} = a $	57
61. Iracionaliųjų reiškinių pertvarkymas	58

III SKYRIUS. FUNKCIJOS IR GRAFIKAI

§ 8. Funkcijos savybės

62. Funkcijos apibrėžimas	59
63. Analizinis funkcijos apibrėžimas	59
64. Funkcijos apibrėžimas lentele	60
65. Skaičių plokštuma. Koordinatinių plokštuma, koordinatinių ašys	61
66. Analiziškai apibrėžtos funkcijos grafikas	62
67. Lyginės ir nelyginės funkcijos	63
68. Lyginės funkcijos grafikas. Nelyginės funkcijos grafikas	63
69. Didėjančios ir mažėjančios funkcijos	64

§ 9. Funkcijų tipai

70. Pastovioji funkcija	65
71. Tiesioginis proporcingumas	65
72. Tiesinė funkcija	66
73. Tiesinių funkcijų grafikų tarpusavio padėtis	68
74. Atvirkštinis proporcingumas	68
75. Funkcija $y = x^2$	69
76. Funkcija $y = x^3$	70
77. Laipsninė funkcija su natūraliuoju rodikliu	70
78. Laipsninė funkcija su sveikuoju neigiamuoju rodikliu	71
79. Funkcija $y = \sqrt{x}$	72
80. Funkcija $y = \sqrt[3]{x}$	72



81. Funkcija $y = \sqrt[n]{x}$	73	108. Bikvadratinės lygtys	97
82. Laipsninė funkcija su teigiamųjų trupmeniniu rodikliu	73	109. Uždavinių sprendimas sudarant lygtis	97
83. Laipsninė funkcija su neigiamųjų trupmeniniu rodikliu	74	110. Iracionaliosios lygtys	100
84. Funkcija $y = [x]$. Funkcija $y = \{x\}$	74	111. Rodiklinės lygtys	102
85. Rodiklinė funkcija	75	112. Logaritminės lygtys	103
86. Atvirkštinė funkcija. Atvirkštinės funkcijos grafikas	77	113. Grafinis lygčių sprendimas	104
87. Logaritminė funkcija	78	114. Lygtys su parametru	105
88. Teigiamojo skaičiaus logaritmo apibrėžimas	80	§ 12. Lygtys su dviem kintamaisiais	
89. Logaritmų savybės	80	115. Lygties su dviem kintamaisiais sprendinys	107
90. Logaritmo pagrindo keitimas	81	116. Lygties su dviem kintamaisiais grafikas	108
91. Logaritmavimas ir potencijavimas	82	117. Tiesinė lygtis su dviem kintamaisiais ir jos grafikas	108
92. Dešimtainis logaritmas. Dešimtainio logaritmo charakteristika ir mantisė	82	§ 13. Lygčių sistemos	
§ 10. Grafikų transformacijos		118. Dviejų lygčių su dviem kintamaisiais sistemos. Ekvivalenčiosios sistemos	109
93. Funkcijos $y = mf(x)$ grafiko braižymas	84	119. Dviejų lygčių su dviem kintamaisiais sistemos sprendimas keitimo būdu	110
94. Funkcijų $y = ax^2$, $y = ax^3$ grafikai	85	120. Dviejų lygčių su dviem kintamaisiais sistemos sprendimas sudėties metodu	110
95. Funkcijos $y = f(x-m) + n$ grafiko braižymas	85	121. Dviejų lygčių su dviem kintamaisiais sistemos sprendimas įvedant naujus kintamuosius	112
96. Kvadratinės funkcijos grafikas	86	122. Grafinis dviejų lygčių su dviem kintamaisiais sistemos sprendimas	113
97. Kvadratinės funkcijos grafiko braižymo būdai	88	123. Dviejų tiesinių lygčių su dviem kintamaisiais sistemos tyrimas	114
IV SKYRIUS. LYGTYS IR LYGČIŲ SISTEMOS		124. Uždavinių sprendimas sudarant lygčių sistemas	115
§ 11. Lygtys su vienu kintamuoju		V SKYRIUS. NELYGYBĖS	
98. Lygties apibrėžimas. Lygties šaknys	90	§ 14. Nelygybių su kintamuoju sprendimas	
99. Lygčių ekvivalentumas	90	125. Pagrindinės sąvokos, susijusios su vieno kintamojo nelygybių sprendimu	117
100. Tiesinės lygtys	91	126. Tiesinės nelygybės su vienu kintamuoju	118
101. Kvadratinės lygtys	92	127. Nelygybių su vienu kintamuoju sistemos	118
102. Nepilnosios kvadratinės lygtys	93	128. Tiesiškai trupmeninės nelygybės	120
103. Vieto teorema	93		
104. Lygtys, kurių kintamasis yra vardiklyje	94		
105. Racionaliosios lygtys	95		
106. Lygties $p(x)$ sprendimas skaidant kairiąją pusę dauginamaisiais	95		
107. Lygčių sprendimas naujo kintamojo įvedimo metodu	96		



129. Antrojo laipsnio nelygybės	121	146. Begalinės geometrinės progresijos, kurios $ q < 1$, suma	139
130. Antrojo laipsnio nelygybių grafinis sprendimas	122		
131. Nelygybės su moduliais	124	VII SKYRIUS. TRIGONOMETRINIAI REISKINIAI	
132. Racionaliųjų nelygybių sprendimas intervalų metodu	126	§ 18. Trigonometrinės funkcijos	
133. Rodiklinės nelygybės	128	147. Trigonometrinių funkcijų apibrėžimas	141
134. Logaritminės nelygybės	128	148. Trigonometrinių funkcijų ženklai ketvirciuose	144
135. Nelygybės su dviem kintamaisiais ir jų sistemos	130	149. Trigonometrinių funkcijų savybės	144
§ 15. Nelygybių įrodymas		§ 19. Trigonometrijos formulės ir jų taikymas pertvarkant trigonometrinius reiškinius	
136. Skirtumo ženklo įvertinimo metodas	132	150. Trigonometriniai reiškiniai	145
137. Sintezinis nelygybių įrodymo metodas	132	151. Argumentų sudėties ir atimties formulės	146
138. Nelygybių įrodymas priešingos prielaidos metodu	133	152. Redukcijos formulės	147
VI SKYRIUS. SKAICIŲ SEKOS		153. To paties argumento trigonometrinių funkcijų sąsajos	148
§ 16. Skaičių seka		154. Dvigubojo kampo formulės	150
139. Sekos apibrėžimas	134	155. Laipsnio žeminimo formulės	150
140. Sekos apibrėžimo būdai	134	156. Trigonometrinių funkcijų sumos keitimas sandauga	151
141. Didėjančios ir mažėjančios sekos	135	157. Trigonometrinių funkcijų sandaugos keitimas suma	152
§ 17. Progresijos		§ 20. Trigonometrinės lygtys	
142. Aritmetinės progresijos apibrėžimas	135	158. Arkssinusas, arkkosinusas, arktangentas, arkotangentas	153
143. Aritmetinės progresijos savybės	136	159. Paprasčiausios trigonometrinės lygtys	154
144. Geometrinės progresijos apibrėžimas	137	160. Trigonometrinių lygčių sprendimo metodai	156
145. Geometrinės progresijos savybės	137		



I SKYRIUS. SKAIČIAI

§ 1. Natūralieji skaičiai

1. Natūraliųjų skaičių žymėjimas. Skaičius 1, 2, 3, 4, 5, ..., vartojamus daiktams skaičiuoti ar daikto numeriui nurodyti, vadiname *natūraliaisiais*. Kiekvieną natūralųjį skaičių žymime skaitmenimis 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Pavyzdžiui, užrašas 2457 reiškia, kad 2 — tūkstančių skaitmuo, 4 — šimtų skaitmuo, 5 — dešimčių skaitmuo ir 7 — vienetų skaitmuo, t. y. $2457 = 2 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7$.

Apskritai, kai a — tūkstančių skaitmuo, b — šimtų skaitmuo, c — dešimčių skaitmuo ir d — vienetų skaitmuo, tai turime skaičių $a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d$. Vartojamas taip pat trumpas užrašas $\overline{abcd}$ (rašyti $abcd$ ne visada tinka, nes taip žymime skaičių a, b, c , ir d sandaugą). Analogiškai užrašas $\overline{abcde}$ reiškia skaičių

$$a \cdot 10\,000 + b \cdot 1000 + c \cdot 100 + d \cdot 10 + e.$$

2. Aritmetiniai veiksmai su natūraliaisiais skaičiais. Dviejų natūraliųjų skaičių sudėties ar daugybos rezultatas visada yra natūralusis skaičius: kai m, n — natūralieji skaičiai, tai $p = m + n$ taip pat natūralusis skaičius, m ir n — *dėmenys*, p — *suma*; $p = mn$ taip pat natūralusis skaičius, m ir n — *dauginamieji*, p — *sandauga*.

Teisingos tokios natūraliųjų skaičių sudėties ir daugybos taisyklės:

$$1^0. a + b = b + a \quad (\text{sudėties perstatymo savybė}).$$

$$2^0. (a + b) + c = a + (b + c), \quad (\text{sudėties jungimo savybė}).$$

$$3^0. ab = ba \quad (\text{daugybės perstatymo savybė}).$$

$$4^0. (ab)c = a(bc) \quad (\text{daugybės jungimo savybė}).$$

$$5^0. a(b + c) = ab + ac \quad (\text{daugybės skirstymo sudėties atžvilgiu savybė}).$$

Atimdami ar dalydami natūraliuosius skaičius, ne visada gauname natūralųjį skaičių: pavyzdžiui, $7 - 4 = 3$ — natūralusis skaičius, bet $4 - 7 = -3$ — ne natūralusis skaičius; $21 : 7 = 3$ — natūralusis skaičius, bet $11 : 2 = 5,5$ — ne natūralusis skaičius.

Kai m, n, k — natūralieji skaičiai ir $m - n = k$, tai sakome, kad m — *turinys*, n — *atėminys*, k — *skirtumas*. Kai $m : n = k$, tai sakome, kad m — *daliny*s, n — *daliklis*, k — *dalmuo*s; skaičių m taip pat vadiname skaičiaus n *kartotiniu*, o skaičių n — skaičiaus m *dalikliu*. Kai m — skaičiaus n kartotinis, tai yra toks natūralusis skaičius k , kad $m = k \cdot n$.



Jungdami skaičius aritmetinių veiksmų ženklais ir skliaustais, sudarome *skaitinius reiškinius*. Skaitiniame reiškinyje atlikę nurodyta tvarka veiksmus, gauname skaičių, kuris vadinamas *reiškinio reikšme*.

Primename aritmetinių veiksmų tvarką skaitiniame reiškinyje: iš pradžių atliekame veiksmus skliaustuose; skliaustų viduje pirmiausia atliekame daugybą ir dalybą, po to sudėtį ir atimtį. Pavyzdžiui, kai reikia rasti reiškinio

$$(28 \cdot 93 + (1927 - 1873) \cdot 31) : 6 - 710$$

reikšmę, tai veiksmų tvarka tokia:

$$(28 \cdot \overset{1}{93} + (1927 - \overset{4}{1873}) \cdot \overset{2}{31}) : \overset{3}{6} - \overset{5}{710}.$$

3. Dalyba su liekana. Kai natūralusis skaičius m nesidalija iš natūraliojo skaičiaus n (t. y. kai nėra tokio natūraliojo skaičiaus k , kad $m = nk$), tai kalbama apie dalybą su liekana. Pavyzdžiui, dalydami skaičių 43 iš skaičiaus 18, gauname dalmenį 2 ir liekaną 7, t. y. $43 = 18 \cdot 2 + 7$. Bendru atveju, *kai m — dalinys, n — daliklis ($m \geq n$), p — dalmuo ir r — liekana, tai*

$$m = np + r, \quad (1)$$

ir $r < n$. Čia m, n, p, r — natūralieji skaičiai (išimtį sudaro atvejis, kai m dalijasi iš n be liekanos, tada $r = 0$). Pavyzdžiui, kai $n = 3$, o $r = 2$, tai $m = 3p + 2$. Tai išraiška skaičių, kuriuos dalydami iš 3 gauname liekaną 2.

Pavyzdys. Raskime skaičiaus 36 421 dalybos iš skaičiaus 25 dalmenį ir liekaną.

Sprendimas. Dalykime kampu:

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} - 36421 \\ - 25 \\ \hline 114 \\ - 100 \\ \hline 142 \\ - 125 \\ \hline 171 \\ - 150 \\ \hline 21 \end{array} \end{array} \bigg| \begin{array}{r} 25 \\ 1456 \end{array}$$

Taigi dalmuo yra 1456, o liekana 21. Taikydami (1) lygybę, galime parašyti: $36\,421 = 25 \cdot 1456 + 21$.

4. Dalumo požymiai. Kartais net neatliekant natūraliojo skaičiaus m dalybos iš natūraliojo skaičiaus n galima atsakyti į klausimą: dalijasi m iš n be liekanos ar ne? Čia padeda įvairūs dalumo požymiai.



- 1.1 t. | Jeigu kiekvienas dėmuo dalijasi iš to paties skaičiaus, tai ir suma dalijasi iš to skaičiaus (*sumos dalumo teorema*).

Zinoma, nereikia manyti, kad jeigu kiekvienas sumos dėmuo nesidalija iš kurio nors skaičiaus, tai ir suma nesidalija iš to skaičiaus. Pavyzdžiui, suma $37 + 19$ dalijasi iš 4, nors nei 37, nei 19 nėra skaičiaus 4 kartotiniai. Beje, jeigu visi dėmenys, išskyrus vieną, dalijasi iš kurio nors skaičiaus, tai suma nesidalija iš to skaičiaus.

- 1.2 t. | Jeigu bent vienas sandaugos dauginamasis dalijasi iš kurio nors skaičiaus, tai ir sandauga dalijasi iš to skaičiaus (*sandaugos dalumo teorema*).

Pavyzdžiui, net nesudauginus galima teigti, kad sandauga $105 \cdot 48 \cdot 93 \cdot 54$ dalijasi iš 5, nes 105 dalijasi iš 5.

- 1.3 t. | Natūralusis skaičius dalijasi iš 2 tada ir tik tada, kai jo paskutinis skaitmuo dalijasi iš 2 (*dalumo iš 2 požymis*).

- 1.4 t. | Natūralusis skaičius dalijasi iš 5 tada ir tik tada, kai jo paskutinis skaitmuo yra 0 arba 5 (*dalumo iš 5 požymis*).

- 1.5 t. | Natūralusis skaičius dalijasi iš 10 tada ir tik tada, kai jo paskutinis skaitmuo 0 (*dalumo iš 10 požymis*).

- 1.6 t. | Natūralusis skaičius, turintis ne mažiau kaip tris skaitmenis, dalijasi iš 4 tada ir tik tada, kai iš 4 dalijasi dviženklis skaičius, sudarytas iš paskutinių dviejų skaičiaus skaitmenų (*dalumo iš 4 požymis*).

Įrodymą pateiksime penkiaženklį skaičiaus atveju. Turime: $\overline{abcde} = a \times 10\,000 + b \cdot 1\,000 + c \cdot 100 + d \cdot 10 + e$. Kadangi 100, 1000 ir 10 000 dalijasi iš 4, tai iš 4 dalijasi ir suma $10\,000a + 1\,000b + 100c$. Vadinas, jeigu dviženklis skaičius $d \cdot 10 + e$ dalijasi iš 4, tai ir $\overline{abcde}$ dalijasi iš 4, o jeigu $10d + e$ nesidalija iš 4, tai ir $\overline{abcde}$ nesidalija iš 4.

Pavyzdžiui, skaičius 15 436 dalijasi iš 4 be liekanos, nes skaičius 36 dalijasi iš 4. Skaičius 372 514 nesidalija iš 4, nes 14 nesidalija iš 4.

- 1.7 t. | Natūralusis skaičius dalijasi iš 3 tada ir tik tada, kai jo skaitmenų suma dalijasi iš 3 (*dalumo iš 3 požymis*).

Įrodymą pateiksime keturženklį skaičiaus atveju. Turime: $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d = (999a + a) + (99b + b) + (9c + c) + d = (999a + 99b + 9c) + (a + b + c + d)$. Skaičiai 9, 99, 999 dalijasi iš 3, todėl $999a + 99b + 9c$ dalijasi iš 3, ir suma $(999a + 99b + 9c) + (a + b + c + d)$ dalysis iš 3 tada ir tik tada, kai skaitmenų suma $a + b + c + d$ dalysis iš 3.



Pavyzdžiui, skaičius 2742 dalijasi iš 3, nes iš 3 dalijasi šio skaičiaus skaitmenų suma $2+7+4+2=15$. Skaičius 17 941 nesi-dalija iš 3, nes šio skaičiaus skaitmenų suma lygi 22, o 22 nesi-dalija iš 3.

1.8 t. | Natūralusis skaičius dalijasi iš 9 tada ir tik tada, kai jo skaitmenų suma dalijasi iš 9 (*dalumo iš 9 požymis*).

5. Natūraliojo skaičiaus skaidymas pirminiais dauginamaisiais. Pirminių skaičiumi vadiname skaičių, kuris turi tik du daliklius (jį patį ir vienetą); skaičių, kuris turi daugiau kaip du daliklius, vadiname *sudėtininiu*.

Pavyzdžiui, skaičius 19 pirminis, nes jis turi tik du daliklius: 1 ir 19. Skaičius 35 sudėtinis, jis turi keturis daliklius: 1, 5, 7, 35. Pirminį skaičių 19 galima išreikšti dviejų natūraliųjų skaičių sandauga tik vienu būdu (jei nekreipsime dėmesio į dauginamųjų tvarką): $19=1 \cdot 19$. Sudėtinį skaičių 35 galima išreikšti dviejų natūraliųjų skaičių sandauga daugiau kaip vienu būdu: $35=1 \cdot 35=5 \cdot 7$.

Beje, skaičiaus 1 nepriskiriame nei prie pirminių, nei prie sudėtininių skaičių.

1.9 t. | Kiekvieną sudėtinį natūralųjį skaičių galima išskaidyti pirminiais dauginamaisiais, ir tik vienu būdu.

Skaidydami skaičius pirminiais dauginamaisiais, remiamės dalumo požymiais ir rašome stulpeliu; daliklį rašome į dešinę nuo vertikalios brūkšnio, o dalmenį — po daliniu. Pavyzdžiui, imkime skaičių 360. Turėsime tokį užrašą:

360		2
180		2
90		2
45		3
15		3
5		5
1		

Jeigu skaičiaus skaidinyje pirminiais dauginamaisiais tas pats dauginamasis a pasitaiko n kartų, tai trumpai rašome a^n , t. y. $\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ dauginamųjų}} = a^n$.

Reiškinį a^n vadiname *laipsniu*, a — *laipsnio pagrindu*, n — *laipsnio rodikliu*.

Pavyzdžiui, $360=2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5=2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.



6. Kelių natūraliųjų skaičių didžiausiasis bendrasis daliklis.
Imkime skaičius 72 ir 96. Surašykime visus skaičiaus 72 daliklius:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72.

Surašykime visus skaičiaus 96 daliklius:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96.

Kai kurie jų yra vienodi:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

Visus šiuos skaičius vadiname skaičių 72 ir 96 *bendraisiais dalikliais*, o didžiausią iš jų — *didžiausiuoju bendruoju dalikliu*.

Dviejų natūraliųjų skaičių a ir b didžiausiąjį bendrąjį daliklį žymime $D(a, b)$. Jeigu skaičiai a ir b tokie, kad $D(a, b) = 1$, tai juos vadiname *tarpusavy pirminiais*.

Pavyzdžiui, skaičiai 72 ir 35 tarpusavy pirminiai (nors kiekvienas iš jų — sudėtinis skaičius).

Norint rasti kelių skaičių didžiausiąjį bendrąjį daliklį, reikia tuos skaičius išskaidyti pirminiais dauginamaisiais, paimti kiekvieną iš dauginamųjų su mažiausiu (iš turimų) rodikliu ir rasti jų sandaugą.

P a v y z d y s. Raskime $D(3780, 7056)$.

S p r e n d i m a s.

3780	2	7056	2
1890	2	3528	2
945	3	1764	2
315	3	882	2
105	3	441	3
35	5	147	3
7	7	49	7
1		7	7
		1	

$$3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \quad 7056 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2$$

Vadinasi, $D(3780, 7056) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$; čia ėmėme tuos pirminius dauginamuosius, kurie įeina tiek į skaičiaus 3780, tiek į skaičiaus 7056 skaidinį.

Taigi $D(3780, 7056) = 252$.

7. Kelių natūraliųjų skaičių mažiausiasis bendrasis kartotinis.
Imkime skaičius 12 ir 18. Surašykime skaičiaus 12 kartotinius:

12, 24, 36, 48, 60, 72, ...



Surašykime skaičiaus 18 kartotinius:

18, 36, 54, 72, ...

Kai kurie jų yra vienodi:

36, 72, ...

Visus šiuos skaičius vadiname skaičių 12 ir 18 *bendraisiais kartotiniais*, o mažiausią iš jų — skaičių 36 — vadiname skaičių 12 ir 18 *mažiausiuoju bendruoju kartotiniu*.

Analogiškai apibrėžiame natūraliųjų skaičių a ir b mažiausiąją bendrąją kartotinį; jį žymime $K(a, b)$. Kiekvienas skaičių a ir b kartotinis dalijasi iš $K(a, b)$.

Norint rasti kelių skaičių mažiausiąją bendrąją kartotinį, reikia tuos skaičius išskaidyti pirminiais dauginamaisiais, paimti kiekvieną iš dauginamųjų su didžiausiu (iš turimų) rodikliu ir rasti jų sandaugą.

P a v y z d y s. Raskime $K(3780, 7056)$.

S p r e n d i m a s. $3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$; $7056 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2$ (žr. 6 skyrelį). Vadinasi, $K(3780, 7056) = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$; čia ėmėme visus pirminius daugiklius, kurie įeina į bent vieno iš skaičių 3780 ir 7056 skaidinį.

Taigi $K(3780, 7056) = 105\,840$.

Su bet kuriais natūraliaisiais skaičiais a ir b teisinga lygybė

$$D(a, b) \cdot K(a, b) = ab.$$

Jeigu a ir b tarpusavy pirminiai, t. y. $D(a, b) = 1$, tai $K(a, b) = ab$. Tai reiškia, kad *dviejų tarpusavy pirminių skaičių mažiausias bendrasis kartotinis lygus tų skaičių sandaugai*.

8. Raidžių vartojimas algebroje. Kintamieji. Algebroje konkrečios skaičių savybės dažnai išreiškiamos raidėmis. Pavyzdžiui, sudėties perstatymo savybė (sukeitus dėmenis vietomis, suma nesikeičia) užrašoma taip: $a + b = b + a$; čia vietoj a ir b galima rašyti bet kuriuos skaičius: $3 + 5 = 5 + 3$; $100 + 3501 = 3501 + 100$ ir pan. Vietoj raidės rašomą skaičių vadiname jos *reikšme*. Kartais (pavyzdžiui, lygtyse) parašyta lygybė yra teisinga tik su tam tikromis raidės reikšmėmis. Pavyzdžiui, $7 + x = 10$ virsta teisinga lygybe tik tada, kai $x = 3$. Algebroje vartojamas raidės vadiname *kintamaisiais*, nes raidės skaitinė reikšmė gali kisti. Pavyzdžiui, lygybėje $a + b = b + a$ galima imti $a = 3$, $b = 5$, o galima ir $a = 7$, $b = 19$ ir t. t. — lygybė visada bus teisinga. Lygybėje $7 + x = 10$ galima imti $x = 3$, o galima $x = 5$; pirmu atveju gausime teisingą skaitinę lygybę, antru — neteisingą. Lygybė $D(a, b) = 1$ (žr. 6 skyrelį) teisinga su tokiomis kintamųjų a ir b reikšmėmis:

$$a = 18, \quad b = 25; \quad a = 100, \quad b = 99; \quad a = 13, \quad b = 1000 \quad \text{ir t. t.}$$



Si lygybė neteisinga su tokiomis kintamųjų reikšmėmis:

$$a=8, \quad b=6; \quad a=25, \quad b=150; \quad a=7, \quad b=777 \quad \text{ir t. t.}$$

§ 2. Racionalieji skaičiai

9. Paprastosios trupmenos. Taisyklingosios ir netaisyklingosios trupmenos. Mišrieji skaičiai. *Paprastoji trupmena* — tai pavidalo $\frac{m}{n}$ skaičius, kai m ir n — natūralieji skaičiai; pavyzdžiui, $\frac{12}{17}$, $\frac{15}{8}$. Skaičių m vadiname *trupmenos skaitikliu*, n — *vardikliu*. Kai $n=1$, turime trupmeną $\frac{m}{1}$, bet dažniau rašome tiesiog m . Tai reiškia, kad *kiekvieną natūralųjį skaičių galima išreikšti paprastąja trupmena, kurios vardiklis 1*. Užrašą $\frac{m}{n}$ galima rašyti ir kitaip: $m:n$.

Paprastosios trupmenos skirstomos į taisyklingąsias ir netaisyklingąsias. Trupmeną $\frac{m}{n}$, kurios skaitiklis mažesnis už vardiklį, vadiname *taisyklingąja*; trupmeną, kurios skaitiklis didesnis už vardiklį arba jam lygus, — *netaisyklingąja*.

Kiekvieną netaisyklingąją trupmeną galima išreikšti natūraliojo skaičiaus ir taisyklingosios trupmenos suma (arba natūraliuoju skaičiumi, kai skaitiklis yra vardiklio kartotinis, pavyzdžiui, $\frac{16}{4}=4$).

P a v y z d y s. Išreikškime netaisyklingąją trupmeną natūraliojo skaičiaus ir taisyklingosios trupmenos suma: a) $\frac{28}{5}$; b) $\frac{43}{13}$.

S p r e n d i m a s. a) $\frac{28}{5} = \frac{25+3}{5} = \frac{25}{5} + \frac{3}{5} = 5 + \frac{3}{5}$;

b) $\frac{43}{13} = \frac{39+4}{13} = \frac{39}{13} + \frac{4}{13} = 3 + \frac{4}{13}$.

Natūraliojo skaičiaus ir taisyklingosios trupmenos sumą rašome be sudėties ženklo, t. y. vietoj $5 + \frac{3}{5}$ rašome $5\frac{3}{5}$, o vietoj $3 + \frac{4}{13}$ rašome $3\frac{4}{13}$. Taip parašytą skaičių vadiname *mišriuoju*. Jis susideda iš dviejų dalių: sveikosios ir trupmeninės. Skaičiaus $3\frac{4}{13}$ sveikoji dalis lygi 3, trupmeninė $\frac{4}{13}$. Kiekvieną netaisyklingąją trupmeną galima parašyti kaip mišrųjį skaičių (ar kaip natūralųjį skaičių). Teisingas ir atvirkščias teiginys: kiekvieną mišrųjį skaičių galima išreikšti netaisyklingąja trupmena. Pavyzdžiui, $4\frac{1}{3} = 4 + \frac{1}{3} = \frac{12}{3} + \frac{1}{3} = \frac{13}{3}$.

10. Lygiosios trupmenos. Pagrindinė trupmenos savybė. Trupmenų prastinimas. Dvi trupmenos $\frac{a}{b}$ ir $\frac{c}{d}$ laikomos *lygiomis*, kai $ad=bc$. Pavyzdžiui, trupmenos $\frac{3}{5}$ ir $\frac{9}{15}$ lygios (nes $3 \cdot 15 = 5 \cdot 9$), trupmenos $\frac{12}{7}$ ir $\frac{24}{14}$ lygios (nes $12 \cdot 14 = 24 \cdot 7$).

Iš trupmenų lygumo apibrėžimo išplaukia, kad trupmenos $\frac{a}{b}$ ir $\frac{am}{bm}$ lygios (nes $a(bm) = b(am)$ — čia taikome natūraliųjų skaičių daugybos jungimo ir keitimo savybes, žr. 2 skyrelį). Vadinasi, $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$, t. y. jeigu trupmenos skaitiklį ir vardiklį padauginsime ar padalysime iš to paties natūraliojo skaičiaus, tai gausime jai lygią trupmeną. Ši savybė vadinama *pagrindine trupmenos savybe*.

Taikant pagrindinę trupmenos savybę kartais trupmeną pavyksta pakeisti jai lygia trupmena, kurios skaitiklis ir vardiklis mažesni. Tokį pakeitimą vadiname *trupmenos prastinimu*. Pavyzdžiui, $\frac{45}{60} = \frac{15}{20}$ (skaitiklį ir vardiklį padalijome iš to paties skaičiaus 3); gautą trupmeną vėl galima suprastinti, dalijant skaitiklį ir vardiklį iš 5, t. y. $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$.

Bendru atveju trupmeną galima suprastinti visada, kai tik skaitiklis ir vardiklis nėra tarpusavy pirminiai skaičiai (žr. 6 skyrelį). Trupmeną, kurios skaitiklis ir vardiklis tarpusavy pirminiai skaičiai, vadiname *nesuprastinamąja trupmena*. Pavyzdžiui, $\frac{3}{4}$ — nesuprastinamoji trupmena. Pagrindinis trupmenos prastinimo tikslas — pakeisti trupmeną jai lygia nesuprastinamąja trupmena.

11. Trupmenų bendravardiklinimas. Imkime dvi trupmenas $\frac{2}{3}$ ir $\frac{15}{8}$. Jų vardikliai nesutampa: 3 ir 8, bet pritaikius pagrindinę trupmenos savybę (žr. 10 skyrelį), kiekvieną jų galima pakeisti kitomis, jai lygiomis trupmenomis ir, be to, tokiomis, kad gautųjų trupmenų vardikliai būtų vienodi. Tokį pertvarkymą vadiname *trupmenų bendravardiklinimu*. Padauginę trupmenos $\frac{2}{3}$ skaitiklį ir vardiklį iš 8, gauname: $\frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{16}{24}$; padauginę trupmenos $\frac{15}{8}$ skaitiklį ir vardiklį iš 3, gauname: $\frac{15 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{45}{24}$. Taigi trupmenos $\frac{2}{3}$ ir $\frac{15}{8}$ subendravardiklintos:

$$\frac{2}{3} = \frac{16}{24}, \quad \frac{15}{8} = \frac{45}{24}.$$



Beje, tai nėra vienintelis iškelto uždavinio sprendimas. Pavyzdžiui, trupmenų bendras vardiklis gali būti 48:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 16}{3 \cdot 16} = \frac{32}{48}; \quad \frac{15}{8} = \frac{15 \cdot 6}{8 \cdot 6} = \frac{90}{48},$$

gali būti 72:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 24}{3 \cdot 24} = \frac{48}{72}; \quad \frac{15}{8} = \frac{15 \cdot 9}{8 \cdot 9} = \frac{135}{72},$$

ir apskritai bendras vardiklis gali būti kiekvienas skaičius, kuris dalijasi ir iš 3, ir iš 8.

Vadinasi, trupmenas subendravardiklinti galima daugeliu būdų, bet paprastai stengiamasi imti *mažiausiąjį bendrąjį vardiklį*, kuris lygus trupmenų vardiklių mažiausiajam bendrajam kartotiniui.

P a v y z d y s. Subendravardiklinkime (imdami mažiausiąjį bendrąjį vardiklį) trupmenas $\frac{7}{24}$ ir $\frac{11}{30}$.

S p r e n d i m a s. Raskime skaičių 24 ir 30 mažiausiąjį bendrąjį kartotinį: $K(24, 30) = 120$ (žr. 7 skyrelį). Kadangi $120:24=5$, tai norint trupmenos $\frac{7}{24}$ vardiklį padaryti lygų 120, reikia jos skaitiklį ir vardiklį padauginti iš 5:

$$\frac{7}{24} = \frac{7 \cdot 5}{24 \cdot 5} = \frac{35}{120}.$$

Kadangi $120:30=4$, tai norint trupmenos $\frac{11}{30}$ vardiklį padaryti lygų 120, reikia jos skaitiklį ir vardiklį padauginti iš 4:

$$\frac{11}{30} = \frac{11 \cdot 4}{30 \cdot 4} = \frac{44}{120}.$$

Trupmenas subendravardiklinome:

$$\frac{7}{24} = \frac{35}{120}; \quad \frac{11}{30} = \frac{44}{120}.$$

Skaičius 5 ir 4 atitinkamai vadiname pirmos ir antros trupmenos *papildomaisiais daugikliais*. Rašome taip:

$$\frac{7}{24} = \frac{7 \overset{5}{\cdot}}{24} = \frac{35}{120}; \quad \frac{11}{30} = \frac{11 \overset{4}{\cdot}}{30} = \frac{44}{120}.$$

Taigi norint subendravardiklinti trupmenas (imant mažiausiąjį bendrąjį vardiklį) reikia:

- 1) rasti trupmenų vardiklių mažiausiąjį bendrąjį kartotinį;
- 2) dalijant mažiausiąjį bendrąjį kartotinį iš kiekvieno vardiklio, rasti papildomuosius daugiklius;
- 3) kiekvienos trupmenos skaitiklį ir vardiklį padauginti iš atitinkamo papildomojo daugiklio.



12. Paprastųjų trupmenų aritmetiniai veiksmai. Paprastųjų trupmenų *sudėti* atliekame taip:

a) jeigu trupmenų vardikliai vienodi, tai prie pirmos trupmenos skaitiklio pridedame antros trupmenos skaitiklį, o vardiklį paliekame tą patį: t. y. $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$;

b) jeigu trupmenų vardikliai skirtingi, tai iš pradžių trupmenas subendravardikliname (paprastai imame mažiausiąjį bendrąjį vardiklį), po to taikome taisyklę a).

1 p a v y z d y s. Sudėkime trupmenas $\frac{7}{24}$ ir $\frac{11}{30}$.

S p r e n d i m a s.

$$\frac{7}{24} + \frac{11}{30} = \frac{7^{\frac{5}{5}}}{24} + \frac{11^{\frac{4}{4}}}{30} = \frac{35}{120} + \frac{44}{120} = \frac{35+44}{120} = \frac{79}{120}.$$

Paprastųjų trupmenų *atimti* atliekame taip:

a) jeigu trupmenų vardikliai vienodi, tai

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b};$$

b) jeigu vardikliai skirtingi, tai iš pradžių trupmenas subendravardikliname, po to taikome taisyklę a).

Paprastųjų trupmenų *daugybą* atliekame taip:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$$

t. y. atskirai sudauginame skaitiklius, atskirai vardiklius, pirmą sandaugą rašome skaitiklyje, antrą — vardiklyje.

Pavyzdžiui, $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{11} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 11} = \frac{6}{77}$.

Paprastųjų trupmenų *dalybą* atliekame taip:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc},$$

t. y. dalinį $\frac{a}{b}$ dauginame iš trupmenos $\frac{d}{c}$ (atvirkštinės dalikliui $\frac{c}{d}$).

Pavyzdžiui, $\frac{2}{3} : \frac{7}{10} = \frac{2}{3} \cdot \frac{10}{7} = \frac{2 \cdot 10}{3 \cdot 7} = \frac{20}{21}$.

2 p a v y z d y s. Raskime skaitinio reiškinių

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{12}{5} + \frac{7}{8} : \frac{5}{6} - \frac{11}{30}$$

reikšmę.

S p r e n d i m a s. 1) $\frac{4}{9} \cdot \frac{12}{5} = \frac{4 \cdot 12}{9 \cdot 5}$. Padalių skaitiklį ir var-



diklį iš 3 (tai verta atlikti prieš dauginant skaitiklyje ir vardiklyje), gauname $\frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5}$, t. y. $\frac{16}{15}$. Taigi $\frac{4}{9} \cdot \frac{12}{5} = \frac{16}{15}$.

$$2) \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} = \frac{7 \cdot 5}{8 \cdot 6} = \frac{7 \cdot 3}{4 \cdot 5} = \frac{21}{20}.$$

3) Ieškant reiškinių $\frac{16}{15} + \frac{21}{20} - \frac{11}{30}$ reikšmės, sudėties ir atimties veiksmus galima atlikti vienu metu. Skaičių 15, 20, 30 mažiausias bendrasis kartotinis yra skaičius 60. Visų trijų trupmenų vardiklį imame 60, o papildomieji daugikliai yra tokie: pirmos trupmenos 4, antros 3, trečios 2. Gauname:

$$\frac{16}{15} + \frac{21}{20} - \frac{11}{30} = \frac{64}{60} + \frac{63}{60} - \frac{22}{60} = \frac{64+63-22}{60} = \frac{105}{60} = \frac{7}{4} = 1 \frac{3}{4}.$$

3 pavyzdys. Atlikime veiksmus: a) $2 \frac{1}{7} + 3 \frac{2}{3}$; b) $1 \frac{2}{5} \cdot 2 \frac{1}{7}$.

Sprendimas. a) Pirmas būdas. Paverskime kiekvieną mišrųjį skaičių netaisyklingąja trupmena, po to sudėkime:

$$2 \frac{1}{7} = 2 + \frac{1}{7} = \frac{14}{7} + \frac{1}{7} = \frac{15}{7}; \quad 3 \frac{2}{3} = 3 + \frac{2}{3} = \frac{9}{3} + \frac{2}{3} = \frac{11}{3};$$

$$\frac{15}{7} + \frac{11}{3} = \frac{15}{7} + \frac{11}{3} = \frac{45}{21} + \frac{77}{21} = \frac{122}{21}.$$

Dabar paverskime netaisyklingąją trupmeną $\frac{122}{21}$ mišriuoju skaičiumi:

$$\frac{122}{21} = \frac{105+17}{21} = \frac{105}{21} + \frac{17}{21} = 5 + \frac{17}{21} = 5 \frac{17}{21}.$$

$$\text{Antras būdas. } 2 \frac{1}{7} + 3 \frac{2}{3} = \left(2 + \frac{1}{7}\right) + \left(3 + \frac{2}{3}\right) = \\ = (2+3) + \left(\frac{1}{7} + \frac{2}{3}\right) = 5 + \left(\frac{3}{21} + \frac{14}{21}\right) = 5 + \frac{17}{21} = 5 \frac{17}{21}.$$

b) Daugindami ir dalydami mišriuosius skaičius, pereiname prie netaisyklingųjų trupmenų:

$$1 \frac{2}{5} = \frac{7}{5}; \quad 2 \frac{1}{7} = \frac{15}{7}.$$

$$\text{Vadinasi, } 1 \frac{2}{5} \cdot 2 \frac{1}{7} = \frac{7}{5} \cdot \frac{15}{7} = \frac{7 \cdot 15}{5 \cdot 7} = 3.$$

13. Dešimtainės trupmenės. Dešimtaine trupmena galima išreikšti taisyklingąja trupmena, kurios vardiklis lygus 10, 100, 1000 ir apskritai 10^n . Pavyzdžiui, $\frac{3}{10} = 0,3$; $\frac{48}{100} = 0,48$; $\frac{21}{1000} = 0,021$. Panašiai galima išreikšti mišrųjį skaičių ar netaisyklin-



gają trupmeną (prieš tai pavertus ją mišriuoju skaičiumi) su minėtais vardikliais. Pavyzdžiui, $2\frac{3}{10} = 2,3$; $\frac{317}{100} = 3\frac{17}{100} = 3,17$.

Cia mišriojo skaičiaus sveikoji dalis atskirta kableliu nuo trupmeninės dalies skaitiklio. Taigi dešimtainė trupmena — tai tik trupmenos, kurios vardiklis 10^n , kitas parašymo būdas.

Dešimtaine trupmena galima paversti kiekvieną paprastąją trupmeną, kurios vardiklis yra kurio nors 10 laipsnio daliklis.

Pavyzdžiui, 4 — skaičiaus 100 daliklis, todėl trupmeną $\frac{3}{4}$ galima

išreikšti dešimtaine trupmena: $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{75}{100} = 0,75$; 125 —

skaičiaus 1000 daliklis, todėl trupmeną $\frac{196}{125}$ galima išreikšti de-

šimtaine: $\frac{196}{125} = \frac{196 \cdot 8}{125 \cdot 8} = \frac{1568}{1000} = 1,568$.

Taigi paprastąją trupmeną galima paversti dešimtaine, jeigu trupmenos vardiklio skaidinyje pirminiais dauginamaisiais yra tik dvejetų ir penketų. Jeigu nesuprastinamosios trupmenos vardiklio skaidinyje be dvejetų ir penketų yra kitų pirminių daugiklių, tai tos trupmenos negalima paversti dešimtaine.

Imkime dešimtainę trupmeną 7,234. Tada

$$7,234 = 7\frac{234}{1000} = 7 + \frac{200+30+4}{1000} = 7 + \frac{200}{1000} + \frac{30}{100} + \frac{4}{1000} = 7 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{4}{1000}.$$

Vadinasi, trupmeną 7,234 sudaro 7 vienetai, 2 dešimtosios, 3 šimtosios ir 4 tūkstantosios. Apskritai dešimtainėje trupmenoje po kablelio gali būti bet kiek skyrių: dešimtosios, šimtosios, tūkstantosios, dešimtūkstantosios ir t. t.

Trupmeną 7,234 galima parašyti taip:

$$7,234 = 7\frac{234}{1000} = 7\frac{2340}{10000} = 7\frac{23400}{100000}, \text{ bet } 7\frac{2340}{10000} = 7,2340,$$

$$\text{o } 7\frac{23400}{100000} = 7,23400..$$

Taigi $7,234 = 7,2340 = 7,23400$. Vadinasi, jeigu prie dešimtainės trupmenos iš dešinės prirašysime vieną ar kelis nulius, tai gausime jai lygią trupmeną. Jeigu dešimtainę trupmeną baigiasi vienu ar keliais nuliais, tai juos galima atimesti — gausime jai lygią trupmeną.

Nagrinėjant dešimtines trupmenas prireikia reikšminio skaitmens sąvokos. Skaičiaus *reikšminiais skaitmenimis* vadiname visus jo skaitmenis, išskyrus pradžioje esančius nulius. Pavyzdžiui, skaičius 23,4009 turi šešis reikšminius skaitmenis; skaičius 0,1023 turi keturis reikšminius skaitmenis; 1, 0, 2, 3; skaičius 0,0004 turi vieną reikšminį skaitmenį: 4.

14. Aritmetiniai veiksmai su dešimtainėmis trupmenomis. Sudėtis. Sudedant dešimtines trupmenas, jas reikia taip parašyti



vieną po kita, kad vienodi skyriai būtų vienas po kitu, o kabelis po kabeliu, ir sudėti skaičius taip, kaip sudedami natūralieji skaičiai. Pavyzdžiui, sudėkime trupmenas 12,7 ir 3,442. Pirmą trupmeną turi vieną skaitmenį po kabelio, o antra — tris. Pertvarkykime pirmą trupmeną taip, kad ji po kabelio turėtų tris skaitmenis: $12,7 = 12,700$, tada

$$\begin{array}{r} + 12,700 \\ + 3,442 \\ \hline 16,142 \end{array}$$

Atimtis. Panašiai atimame dešimtaines trupmenas. Raskime skaičių 13,1 ir 0,37 skirtumą:

$$\begin{array}{r} - 13,10 \\ - 0,37 \\ \hline 12,73 \end{array}$$

Daugyba. Išnagrinėkime pavyzdį, kaip dauginamos dešimtainės trupmenos. Sudauginkime skaičius 1,12 ir 2,3. Turime:

$$1,12 \cdot 2,3 = 1 \frac{12}{100} \cdot 2 \frac{3}{10} = \frac{112}{100} \cdot \frac{23}{10} = \frac{112 \cdot 23}{1000} = \frac{2576}{1000} = 2,576.$$

Galima dauginti ir neverčiant trupmenų paprastosiomis: užtenka sudauginti skaičius nekreipiant dėmesio į kabelius (kaip natūraliuosius skaičius), po to iš dešinės atskirti kabeliu tiek gauto rezultato skaitmenų, kiek jų iš viso yra po kabelio abiejuose dauginamuosiuose.

Pavyzdžiui, padauginkime 2,7 iš 1,3. Turime: $27 \cdot 13 = 351$. Atskiriame iš dešinės du skaitmenis kabeliu (iš viso dauginamuosiuose po kabelio yra du skaitmenys). Taigi $2,7 \cdot 1,3 = 3,51$.

Jeigu sandaugoje gauname mažiau skaitmenų negu reikia atskirti kabeliu, tai priekyje rašome trūkstamus nulius, pavyzdžiui:

$$\begin{array}{r} \times 2,12 \\ \times 0,13 \\ \hline 636 \\ + 212 \\ \hline 0,2756 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times 3,43 \\ \times 0,02 \\ \hline 0,0686 \end{array}$$

Išnagrinėkime, kaip dešimtainė trupmena dauginama iš 10, 100, 1000 ir t. t. Padauginkime trupmeną 12,733 iš 10. Turime $12733 \cdot 10 = 127\,330$. Atskyrę iš dešinės kabeliu tris skaitmenis, gauname $12,733 \cdot 10 = 127,330$. Bet $127,330 = 127,33$. Vadinasi, $12,733 \cdot 10 = 127,33$. Todėl dauginant dešimtainę trupmeną iš 10 užtenka kabelį perkelti per vieną skaitmenį į dešinę.

Apskritai, norint padauginti dešimtainę trupmeną iš 10, 100, 1000, reikia toje trupmenoje perkelti kabelį per 1, 2, 3 skaitmenis į dešinę.



Dalyba. Dešimtainę trupmeną iš natūraliojo skaičiaus dalijame taip pat, kaip natūralųjį skaičių iš natūraliojo; dalmenyje kablelį dedame po to, kai baigiame dalyti sveikąją dalį. Pavyzdžiui, padalykime 22,1 iš 13:

$$\begin{array}{r} - 22,1 \overline{)13} \\ \underline{13} 1,7 \\ \underline{91} \\ \underline{-91} \\ \underline{0} \end{array}$$

Jeigu dalinio sveikoji dalis mažesnė už daliklį, tai padaliję gauname nulį sveikų, pavyzdžiui:

$$\begin{array}{r} - 0,221 \overline{)13} \\ \underline{13} 0,017 \\ \underline{-91} \\ \underline{-91} \\ \underline{0} \end{array}$$

Dabar išnagrinėkime, kaip dešimtainę trupmena dalijama iš dešimtainės. Pavyzdžiui, padalykime 2,576 iš 1,12. Tam ir dalinio, ir daliklio kablelį perkelsime į dešinę per tiek skaitmenų, kiek jų yra daliklyje (šiuo pavyzdyje — per du). Kitaip tariant, dalinį ir daliklį padauginsime iš 100 — nuo to dalmuo nepasikeis. Tada reiks trupmeną 257,6 padalyti iš natūraliojo skaičiaus 112, t. y. turėsime jau nagrinėtą atvejį:

$$\begin{array}{r} - 257,6 \overline{)112} \\ \underline{224} 2,3 \\ \underline{336} \\ \underline{-336} \\ \underline{0} \end{array}$$

Norint padalyti dešimtainę trupmeną iš 10^n , trupmenos kablelį reikia perkelti per n skaitmenų į kairę. Pavyzdžiui:

$$27,344 : 10^4 = 0,0027344.$$

Dešimtainių trupmenų kaip ir natūraliųjų skaičių dalyba — ne visada įmanoma. Pavyzdžiui, dalykime 2,8 iš 0,09:

$$\begin{array}{r} - 280 \overline{)9} \\ \underline{27} 31,11 \dots \\ \underline{10} \\ \underline{-9} \\ \underline{10} \\ \underline{-9} \\ \underline{1} \dots \end{array}$$



Gavome vadinamąją begalinę dešimtainę trupmeną. Tokiais atvejais galima pereiti prie paprastųjų trupmenų. Pavyzdžiui,

$$2,8 : 0,09 = \frac{28}{10} : \frac{9}{100} = \frac{28 \cdot 100}{10 \cdot 9} = \frac{280}{9} = 31 \frac{1}{9}.$$

Gali pasitaikyti, kad vieni skaičiai išreikšti paprastosiomis trupmenomis, kiti — dešimtainėmis, tretį yra mišrieji. Atliekant veiksmus su tokiais skaičiais, galima elgtis visaip: arba paversti dešimtaines trupmenas paprastosiomis ir taikyti paprastųjų trupmenų veiksmų taisykles, arba paprastąsias trupmenas ir mišriuosius skaičius paversti (kai tai įmanoma) dešimtainėmis trupmenomis ir taikyti dešimtainių trupmenų veiksmų taisykles.

15. Procentai. Iš dešimtainių trupmenų praktikoje ypač dažnai vartojame trupmeną 0,01, kurią vadiname *procentu* ir žymime 1%. Taigi $1\% = 0,01$, $2\% = 0,02$, $45\% = 0,45$, $350\% = 3,50$ ir t. t. Ekonomikos ir statistikos apskaičiavimuose, daugelyje mokslo šakų dydžių dalis įprasta reikšti procentais. Pavyzdžiui, norint rasti 60 kg kiekio 23 procentus, reikia 60 kg padauginti iš 0,23:

$$60 \cdot 0,23 = 13,8.$$

Vadinasi, 60 kg kiekio 23% sudaro 13,8 kg.

1 pavyzdys. Darbininkas per pamainą turėjo pagaminti 80 detalių. Pasibaigus darbo dienai paaiškėjo, kad jis įvykdė 150% pamainos užduoties. Kiek detalių pagamino darbininkas?

Sprendimas. 1. $150\% = 1,5$. 2. $80 \cdot 1,5 = 120$.

Atsakymas. 120 detalių.

2 pavyzdys. Darbininkas per pamainą turi pagaminti 80 detalių. 12 valandą dienos jis buvo pagaminęs 55 detales. Kiek procentų užduoties darbininkas įvykdė iki minėtos valandos?

Sprendimas. Iki 12 valandos atlikta užduoties dalis išreiškiama trupmena $\frac{55}{80}$. Ją paverčiame procentais:

$$\frac{55}{80} = \frac{550}{800} = \frac{550}{8} \cdot \frac{1}{100} = \frac{275}{4} \% = 68,75\%.$$

Atsakymas. 68,75%.

3 pavyzdys. Darbininkas iki 12 valandos pagamino 55 detales; tai sudaro 68,75% pamainos užduoties. Kiek detalių darbininkas turi pagaminti per pamainą?

Sprendimas. Pamainos užduotį sudarančių detalių skaičių pažymėkime x . Iš uždavinio sąlygos išeina, kad $68,75\% \cdot x = 55$, t. y. kad $\frac{68,75}{100} \cdot x = 55$. Todėl

$$x = \frac{100 \cdot 55}{68,75} = 80.$$

Atsakymas. 80 detalių.



na 2,73 taip pat leidžiama rašyti su begalinio nulio skaičiumi, t. y. $2,73 = 2,73000\dots$. Čia po kablelio yra be galo daug dešimtainių ženklų. Tokią dešimtainę trupmeną vadiname *begaline dešimtaine trupmena*.

Pavyzdžiui, imkime skaičių $\frac{3}{14}$ ir dalykime skaitiklį iš vardiklio. Gausime vis naujus dešimtainius ženklus. Beje, kiekvieną natūralųjį skaičių galima išreikšti begaline dešimtaine trupmena, kurios visi dešimtainiai ženklai yra nuliai.

$$\begin{array}{r} - 3,00000000 \dots \\ \underline{28} \\ - 20 \\ \underline{14} \\ - 60 \\ \underline{56} \\ - 40 \\ \underline{28} \\ - 120 \\ \underline{112} \\ - 80 \\ \underline{70} \\ - 100 \\ \underline{98} \\ - 20 \\ \underline{14} \\ - 60 \dots \end{array}$$

Surašykime paeiliui liekanas, kurias gavome dalydami:

2, 6, 4, 12, 8, 10, 2, 6, ...

Aišku, kad visos tos liekanos mažesnės už daliklį, t. y. mažesnės už skaičių 14. Tai reiškia, kad kažkuriame dalybos žingsnyje būtinai turi atsirasti liekana, kuri jau buvo anksčiau. Čia septintame žingsnyje gavome liekaną 2, kuri jau buvo pirmame žingsnyje.



Be to, aišku, kad kai tik atsiras liekana, kuri jau buvo, tai po jos liekanos eis ta pačia tvarka, kaip ir anksčiau. Mūsų pavyzdyje po liekanos 2 eina liekana 6, po to 4, po to 12 ir t. t. Taigi gauname tokią liekanų seką:

$$2, 6, 4, 12, 8, 10, 2, 6, 4, 12, 8, 10, \dots$$

Periodiškai besikartojančios liekanų grupės atitinkamai duos periodiškai besikartojančias skaitmenų grupes skaičiaus dešimtainėje išraiškoje. Mūsų pavyzdyje turėsime:

$$\frac{3}{14} = 0,2142857142857142857 \dots$$

Tokią skaičiaus dešimtainėje išraiškoje po kablelio besikartojančią skaitmenų grupę vadiname *periodu*, o savo išraiškoje tokį periodą turinčią begalinę dešimtainę trupmeną vadiname *periodine*. Trumpumo dėlei įprasta periodą rašyti vieną kartą ir jį suskliausti: $0,2142857142857142857 \dots = 0,2(142857)$.

Jeigu periodas prasideda iš karto po kablelio, tai trupmeną vadiname *grynąja periodine*; jeigu tarp kablelio ir periodo yra kitų dešimtainių ženklų, tai trupmeną vadiname *mišriąja periodine*. Taigi $2,(23) = 2,232323 \dots$ — grynoji periodinė trupmena; $0,2(142857)$ — mišrioji periodinė trupmena; $2,73 = 2,73000 \dots = 2,73(0)$ — mišrioji periodinė trupmena.

17^{*1}. Begalinės dešimtainės periodinės trupmenos vertimas paprastąja. Norint begalinę dešimtainę trupmeną padauginti iš 10, 100, 1000 ir t. t., užtenka (kaip ir baigtinėje dešimtainėje trupmenoje) perkelti kablelį per vieną, du, tris ir t. t. ženklus į dešinę.

Pavyzdžiui, $0,1(23) \cdot 100 = 0,1232323 \dots \cdot 100 = 12,323232 \dots = 12,(32)$.

Kaip periodinę dešimtainę trupmeną paversti paprastąja, išnagrinėsime pavyzdžiais.

Pavyzdys. Paverskime paprastąja trupmena: a) $0,(13)$; b) $2,(273)$; c) $0,2(54)$; d) $3,254(9)$.

Sprendimas. a) Pažymėkime $x = 0,(13) = 0,131313 \dots$. Padauginkime grynąją periodinę trupmeną x iš tokio skaičiaus, kad kablelis pasislinktų lygiai per periodą į dešinę. Kadangi periode yra du skaitmenys, tai užtenka skaičių x padauginti iš 100, tada $100x = 0,131313 \dots \cdot 100 = 13,1313 \dots = 13,(13)$. Dabar atimkime x iš $100x$, gausime $100x - x = 13,(13) - 0,(13)$. Vadinasi, $99x = 13$, todėl $x = \frac{13}{99}$.

b) Pažymėkime $x = 2,(273)$. Šios grynosios periodinės trupmenos periodas turi tris skaitmenis. Padauginę x iš 1000, gauname $1000x = 2273,(273)$.

¹ Ženklu * pažymėtų skyrelių neprivaloma mokyti mokykloje.



Todėl

$$1000x - x = 2273, (273) - 2, (273), 999x = 2271,$$

$$x = \frac{2271}{999} = \frac{757}{333} = 2 \frac{91}{333}.$$

c) Pažymėkime $x = 0,2(54)$. Šioje mišriojoje periodinėje trupmenoje kablelį perkeltume į dešinę per tiek ženklų, kad gautume grynąją periodinę trupmeną. Tam užtenka x padauginti iš 10: $10x = 2,(54)$.

Pažymėkime $y = 2,(54)$; šią grynąją periodinę trupmeną paverskime paprastąja, kaip kad darėme anksčiau esniuose pavyzdžiuose.

Kadangi $y = 2,(54)$, tai $100y = 254,(54)$;

$$100y - y = 254,(54) - 2,(54); \quad 99y = 252; \quad y = \frac{252}{99} = \frac{28}{11}.$$

$$\text{Vadinasi, } 10x = \frac{28}{11}, \quad x = \frac{28}{11 \cdot 10} = \frac{14}{55}.$$

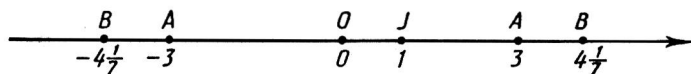
d) Pažymėkime $x = 3,254(9)$, tada $1000x = 3254,(9)$. Pažymėkime $y = 1000x$. Tada $y = 3254,(9)$, iš čia $10y = 32549,(9)$;

$$10y - y = 32549,(9) - 3254,(9); \quad 9y = 29295; \quad y = 3255;$$

$$1000x = 3255; \quad x = \frac{3255}{1000} = 3 \frac{51}{200}.$$

Bet $\frac{3255}{1000} = 3,255 = 3,255(0)$, taigi gavome baigtinę dešimtainę trupmeną, arba baigtinę trupmeną, kurios periodas 0. Vadinasi, $3,254(9) = 3,255(0)$. Taip yra su visomis dešimtainėmis trupmenomis, kurių periodas yra 9 — tokią trupmeną galima parašyti kaip trupmeną, kurios periodas yra 0. Tam užtenka vienetu padidinti paskutinį dešimtainį ženklą, esantį prieš periodą. Pavyzdžiui, $0,45(9) = 0,46(0)$; $14,(9) = 15,(0)$ ir pan.

18. Koordinačių tiesė. Nubrėžkime tiesę l , pažymėkime joje tašką O , kurį laikysime atskaitos pradžia, pasirinkime vienetinę atkarpą $[0; 1]$ ir kryptį (1 pav.). Tada sakoma, kad turime *koordinačių tiesę*. Kiekvieną natūralųjį skaičių ar trupmeną atitinka vienas tiesės l taškas. Pavyzdžiui, imkime skaičių 3. Nuo taško O pasirinktąja kryptimi atidėkime vienetinę atkarpą tris kartus. Gausime tašką A — tas taškas ir atitinka skaičių 3. Imkime skaičių



1 pav.



$4\frac{1}{7}$; nuo taško O pasirinktąja kryptimi atidėkime vienetinę atkarpą keturis kartus, po to dar $\frac{1}{7}$ atkarpos dalį. Gausime tašką B — jis ir atitinka skaičių $4\frac{1}{7}$.

Tiesės l tašką M atitinka tam tikras skaičius r . Jį vadiname *taško koordinate*, ir rašome $M(r)$. Galima nurodyti ir taškų J , A , B (žr. 1 pav.) koordinates $J(1)$, $A(3)$, $B(4\frac{1}{7})$. Taško O koordinate laikomas skaičius 0.

Nuo taško O atidėkime vienetinę atkarpą tris kartus kryptimi, priešinga pasirinktajai. Gausime tašką A' , simetrišką taškui A atskaitos pradžios O atžvilgiu. Taško A koordinatė yra skaičius 3, o taško A' koordinatę rašome taip: -3 ir skaitome „minus 3“. Analogiškai taško B' , simetriško taškui B , koordinate laikome skaičių $-4\frac{1}{7}$. Skaičiai 3 ir -3 , $4\frac{1}{7}$ ir $-4\frac{1}{7}$ vadinami *priešingaisiais*. Skaičiai, kuriuos atitinka taškai, esantys koordinačių tiesėje nuo nulio pasirinktąja kryptimi, vadinami *teigiamaisiais*; 1, 3, $4\frac{1}{7}$ — teigiamieji skaičiai. Teigiamuosius skaičius kartais užrašome su pliuso ženklu: $+1$, $+3$, $+4\frac{1}{7}$. Skaičiai, kuriuos atitinka taškai, esantys koordinačių tiesėje nuo nulio priešinga pasirinktajai kryptimi, vadinami *neigiamaisiais*; -3 , $-4\frac{1}{7}$ — neigiamieji skaičiai. Skaičiaus 0 nepriskiriame nei prie teigiamųjų, nei prie neigiamųjų; skaičių 0 atitinkantis taškas O koordinačių tiesėje skiria taškus, kurių koordinatės teigiamos, nuo taškų, kurių koordinatės neigiamos.

Pasirinktoji koordinačių tiesės kryptis vadinama *teigiamąja* (paprastai ji eina į dešinę), o jai priešinga kryptis — *neigiamąja*.

19. Racionaliųjų skaičių aibė. Natūralieji skaičiai 1, 2, 3, 4, 5, ... kitaip dar vadinami teigiamaisiais sveikaisiais skaičiais. Natūraliesiems priešingi skaičiai -1 , -2 , -3 , -4 , -5 , ... vadinami neigiamaisiais sveikaisiais skaičiais. Skaičius 0 taip pat laikomas sveikuoju skaičiumi. Taigi *sveikieji skaičiai* — tai natūralieji skaičiai, natūraliesiems priešingi skaičiai ir skaičius 0.

Sveikieji skaičiai ir trupmenos (teigiamosios ir neigiamosios) sudaro *racionaliųjų skaičių aibę*.

Kiekvieną racionalųjį skaičių galima išreikšti santykiu $\frac{m}{n}$ (m — sveikasis skaičius, o n — natūralusis skaičius); be to, tą patį skaičių išreikšti santykiu galima daugeliu būdų. Pavyzdžiui:

$$-2 = \frac{-4}{2} = \frac{-6}{3} = \frac{-100}{50}; \quad 0,3 = \frac{3}{10} = \frac{6}{20} = \frac{300}{1000}.$$



Tarp trupmenų, žyminčių kurį nors racionalųjį skaičių, yra tik viena nesuprastinamoji trupmena. Sveikasis skaičius žymimas trupmena, kurios vardiklis 1.

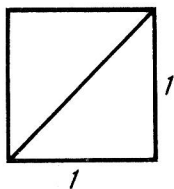
§ 3. Realieji skaičiai

20. Iracionalieji skaičiai. Matematikoje vartojami ne tik racionalieji skaičiai, bet ir kitokios prigimtys skaičiai, kurie nėra nei sveikieji, nei trupmeniniai. Visi tokie skaičiai vadinami *iracionaliaisiais*. Pavyzdžiui, kvadrato, kurio kraštinė lygi 1 (2 pav.), įstrižainės ilgis turi būti išreiškiamas tokiu teigiamu skaičiumi r , kad $r^2 = 1^2 + 1^2$ (remiantis Pitagoro teorema, žr. p. 184), t. y. tokiu, kad $r^2 = 2$. Skaičius r negali būti sveikasis, nes $1^2 = 1$; $2^2 = 4$; $3^2 = 9$ ir t. t. Skaičius r negali būti ir trupmeninis: kai $r = \frac{m}{n}$ –

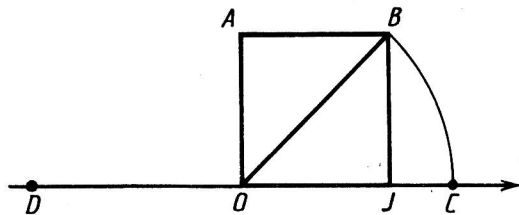
nesuprastinamoji trupmena ir $n \neq 1$, tai $r^2 = \frac{m^2}{n^2}$ taip pat yra nesuprastinamoji trupmena ir $n^2 \neq 1$; vadinasi, $\frac{m^2}{n^2}$ nėra sveikasis skaičius, todėl jis negali būti lygus 2. Todėl kvadrato įstrižainės ilgis išreiškiamas iracionaliuoju skaičiumi, kuris žymimas taip: $\sqrt{2}$ (skaitome: „kvadratinė šaknis iš dviejų“). 3 paveiksle pavaizduota koordinatinių tiesė l , kvadratas $OABJ$, $OC = OB = OD$. Tada taško C koordinatė yra skaičius $\sqrt{2}$, o taško D koordinatė – skaičius $-\sqrt{2}$. Taškai C ir D turi iracionaliąsias koordinates.

Nėra racionalaus skaičiaus, kurio kvadratas būtų lygus 5, 7, 10. Atitinkamus iracionaliuosius skaičius žymime $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{10}$. Jiems priešingi skaičiai taip pat iracionalieji, juos žymime $-\sqrt{5}$, $-\sqrt{7}$, $-\sqrt{10}$.

Iracionaliųjų skaičių prireikia ne tik ieškant skaičiaus, kurio kvadratas yra duotasis teigiamasis skaičius. Pavyzdžiui, skaičiaus π , žyminčio apskritimo ilgio ir jo skersmens santykį, taip pat



2 pav.



3 pav.



negalima išreikšti paprastąja trupmena — tai iracionalusis skaičius.

21. Realieji skaičiai. Skaičių tiesė. Racionalieji ir iracionalieji skaičiai kartu sudaro *realiųjų skaičių* aibę. Kiekvieną realųjį skaičių atitinka vienintelis koordinačių tiesės taškas (kaip jo ieškoti nurodyta 18 skyrelyje). Kiekvienas koordinačių tiesės taškas atitinka vienintelį realųjį skaičių (užtenka rasti atstumą nuo atskaitos pradžios iki to taško ir prieš rastąjį skaičių parašyti ženklą $+$ arba $-$ atsižvelgiant į tai, kur yra tas taškas: į dešinę ar į kairę nuo atskaitos pradžios). Trumpumo dėlei paprastai vietoj pasakymo „koordinačių tiesės taškas, atitinkantis realųjį skaičių a “, rašome ir sakome „taškas a “, o vartodami terminą „skaičius a “, turime galvoje terminą „realusis skaičius a “.

Realiųjų skaičių aibė vadinama ir *skaičių tiesė*. Skaičių tiesės geometrinis modelis yra koordinačių tiesė.

22. Skaičių aibių žymėjimas.

N — natūraliųjų skaičių aibė.

Z — sveikųjų skaičių aibė.

Q — racionaliųjų skaičių aibė.

R — realiųjų skaičių aibė.

Užrašas $n \in N$ (skaitome „ n priklauso aibei N “) reiškia, kad n — natūralusis skaičius. Panašią prasmę turi žymėjimai: $m \in Z$ (m — sveikasis skaičius); $z \in Q$ (z — racionalusis skaičius); $x \in R$ (x — realusis skaičius). Apskritai, jeigu X — tam tikra skaičių aibė, tai užrašas $x \in X$ reiškia, kad skaičius x priklauso aibei X .

23. Realųjų skaičių palyginimas. Apie kiekvienus du nelygius realiuosius skaičius a ir b galima pasakyti, kuris jų didesnis, o kuris mažesnis.

Sakome, kad skaičius a *didesnis* už skaičių b , ir rašome: $a > b$, kai skirtumas $a - b$ — *teigiamasis skaičius*; kai skirtumas $a - b$ — *neigiamasis skaičius*, tai sakome, kad skaičius a *mažesnis* už skaičių b , ir rašome: $a < b$. Pagal šį apibrėžimą kiekvienas teigiamasis skaičius yra didesnis už nulį, kiekvienas neigiamasis skaičius mažesnis už nulį ir mažesnis už bet kurį teigiamąjį skaičių. Kad ir kokie būtų skaičiai a ir b , teisinga viena ir tik viena iš sąsajų: $a > b$, $a < b$, $a = b$.

Geometriškai nelygybė $a < b$ ($a > b$) reiškia, kad taškas a yra koordinačių tiesėje į kairę (dešinę) nuo taško b .

Ženklus $<$, $>$ vadiname *griežtųjų nelygybių ženklais*. Kartais vartojami ženklai $\geq$, $\leq$ — *negriežtųjų nelygybių ženklai*; užrašas $a \leq b$ reiškia, kad teisinga viena iš dviejų: arba skaičius a mažesnis už skaičių b , arba skaičius a lygus skaičiui b . Nelygybės $a > b$ ir $c > d$ vadiname to paties ženklo nelygybėmis; nelygybės $a > b$ ir $c < d$ vadiname priešingų ženklų nelygybėmis. Jeigu



skaičiai a, b, c yra tokie, kad $a < b$ ir $b < c$, tai vartojame užrašą $a < b < c$.

P a v y z d y s. Palyginkime skaičius $\frac{2}{3}$ ir $0,67$.

S p r e n d i m a s. Sudarykime skirtumą $\frac{2}{3} - 0,67$ ir raskime to skirtumo reikšmę:

$$\frac{2}{3} - 0,67 = \frac{2}{3} - \frac{67}{100} = \frac{2 \cdot 100 - 67 \cdot 3}{300} = -\frac{1}{300}.$$

Skirtumas neigiamas, todėl $\frac{2}{3} < 0,67$.

24. Skaitinių nelygybių savybės. Kad ir kokie būtų realieji skaičiai a, b, c, d , yra teisingos tokios savybės:

1°. *Kai $a > b$, tai $b < a$.*

2°. *Kai $a > b$ ir $b > c$, tai $a > c$ (tranzityvumo savybė).*

3°. *Kai $a > b$, tai $a + c > b + c$.*

4°. *Kai $a > b$ ir c — teigiamasis skaičius ($c > 0$), tai $ac > bc$.*

Ši savybė turi tokią prasmę: *jeigu teisingos nelygybės abi pusės padauginsime iš to paties teigiamojo skaičiaus, tai gausime teisingą nelygybę.*

I r o d y m a s. Nagrinėkime skirtumą $ac - bc$. Turime $ac - bc = c(a - b)$. Iš sąlygos žinome, kad c — teigiamasis skaičius. Kadangi $a > b$, tai ir $a - b$ — teigiamasis skaičius. Bet dviejų teigiamųjų skaičių sandauga yra teigiamasis skaičius, todėl $c(a - b) > 0$. Vadinasi, $ac - bc > 0$. Bet jeigu skirtumas $ac - bc$ — teigiamasis skaičius, tai $ac > bc$.

5°. *Kai $a > b$ ir c — neigiamasis skaičius ($c < 0$), tai $ac < bc$.*

Ši savybė turi tokią prasmę: *jeigu teisingos nelygybės abi pusės padauginsime iš to paties neigiamojo skaičiaus ir pradinės nelygybės ženklą pakeisime priešingu, tai gausime teisingą nelygybę.*

6°. *Kai $a > b$ ir $c > d$, tai $a + c > b + d$ (jeigu panariui sudėsime dvi teisingas to paties ženklo nelygybes, tai gausime teisingą nelygybę).*

7°. *Kai a, b, c, d — teigiamieji skaičiai ir $a > b, c > d$, tai $ac > bd$ (jeigu panariui sudauginsime teisingas to paties ženklo nelygybes, kurių kairiosios ir dešinėsios pusės yra teigiamieji skaičiai, tai gausime teisingą nelygybę).*

I r o d y m a s. Kadangi $a > b$ ir $c > 0$, tai, remiantis 5° savybe, $ac > bc$; panašiai iš $c > d$ ir $b > 0$ išplaukia $bc > bd$. Kadangi $ac > bc$ ir $bc > bd$, tai, remiantis 2° savybe, $ac > bd$.

8°. *Kai $a > b > 0$, tai $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.*

9°. *Kai $a > b > 0$, o n — bet kuris natūralusis skaičius, teisinga nelygybė $a^n > b^n$.*

25. Skaičių intervalai. Imkime du skaičius a ir b , $a < b$, ir pažymėkime juos taškais koordinačių tiesėje.

Kiekvienas taškas x , kuris yra tarp a ir b , tenkina nelygybes



$a < x < b$. Aibę visų skaičių, tenkinančių tas nelygybes, žymime $(a; b)$ ir vadiname *atviruoju intervalu*.

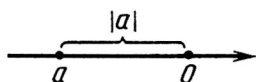
Aibę visų skaičių x , kurių kiekvienas tenkina nelygybes $a \leq x \leq b$, žymime $[a; b]$ ir vadiname *atkarpa*, arba *uždaruju intervalu*.

Atvirasis ir uždarusis intervalai — tai baigtiniai skaičių intervalai. Yra dar dvi baigtinių intervalų rūšys: $[a; b)$ — tai aibė skaičių x , tenkinančių nelygybes $a \leq x < b$, ir $(a; b]$ — aibė skaičių x , tenkinančių nelygybes $a < x \leq b$. Šiuos skaičių intervalus vadiname *pusatviriais intervalais*.

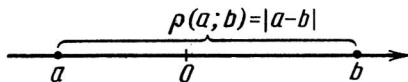
Yra ir begalinių skaičių intervalų. Aibę visų skaičių, tenkinančių nelygybę $x \geq a$, žymime $[a; +\infty)$ ir vadiname *spinduliu*; aibę visų skaičių x , tenkinančių nelygybę $x > a$, žymime $(a; +\infty)$ ir vadiname *atviruoju spinduliu*. Ženklą $+\infty$ skaitome: „Plus begalybė“.

Spindulys taip pat gali būti pavidalo $(-\infty; b]$ (skaičiai, tenkinantys nelygybę $x \leq b$), o atvirasis spindulys — pavidalo $(-\infty; b)$ (skaičiai, tenkinantys nelygybę $x < b$). Ženklą $-\infty$ skaitome: „Minus begalybė“.

Intervalo rūšis	Geometrinis vaizdas	Žymėjimas	Nelygybė
Intervalas		$(a; b)$	$a < x < b$
Atkarpa		$[a; b]$	$a \leq x \leq b$
Pusatviris intervalas		$(a; b]$	$a < x \leq b$
Pusatviris intervalas		$[a; b)$	$a \leq x < b$
Spindulys		$[a; +\infty)$	$x \geq a$
Spindulys		$(-\infty; b]$	$x \leq b$
Atvirasis spindulys		$(a; +\infty)$	$x > a$
Atvirasis spindulys		$(-\infty; b)$	$x < b$



5 pav.



6 pav.

Praktiškai ne visada vartojame terminus „atvirasis intervalas“, „uždasis intervalas“, „pusatviris intervalas“, „spindulys“, o keičiame juos bendru pavadinimu „(skaičių) intervalas“.

26. Realiojo skaičiaus modulis. Realiojo skaičiaus a moduli vadiname patį tą skaičių, kai $a \geq 0$, ir priešingąjį skaičių $-a$, kai $a < 0$. Skaičiaus a modulį žymime $|a|$. Taigi

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{kai } a \geq 0, \\ -a, & \text{kai } a < 0. \end{cases}$$

Pavyzdžiui, $|\pi - 3| = \pi - 3$, nes $\pi - 3 > 0$; ($\pi = 3,14\dots$).

$$|-3,7| = -(-3,7) = 3,7, \text{ nes } -3,7 < 0.$$

Geometriškai $|a|$ reiškia taško a atstumą koordinačių tiesėje nuo taško O (5 pav.).

Modulio savybės:

$$1^0. |a| \geq 0.$$

$$2^0. |a| = |-a|.$$

$$3^0. |ab| = |a| \cdot |b|.$$

$$4^0. \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0.$$

$$5^0. |a|^2 = a^2.$$

27. Atstumo tarp dviejų koordinačių tiesės taškų formulė. Atstumas $\rho(a; b)$ ¹ tarp dviejų koordinačių tiesės taškų a ir b (6 pav.) išreiškiamas formule

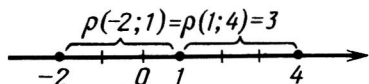
$$\rho(a; b) = |a - b|.$$

Taigi $\rho(-2; 5) = |-2 - 5| = |-7| = -(-7) = 7$.

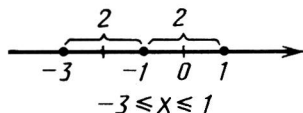
P a v y z d y s . Raskime visus tokius taškus x , kurie tenkina: a) lygtį $|x - 1| = 3$; b) nelygybę $|x + 1| \leq 2$.

S p r e n d i m a s . a) Lygčiai tinka tokie taškai x , kurių atstumas nuo taško 1 lygus 3. Tai taškai -2 ir 4 (7 pav.). Vadinasi, lygtis turi dvi šaknis: $-2, 4$.

¹ ρ — graikų raidyno raidė „ro“.



7 pav.



8 pav.

b) Nelygybei tinka tokie taškai x , kurie nutolę nuo taško -1 atstumu, mažesniu už 2 arba lygiu 2. Tai intervalo $[-3; 1]$ taškai (8 pav.).

28. Veiksmų su realiaisiais skaičiais taisyklės. Dviejų to paties ženklo skaičių suma yra to paties ženklo skaičius; norint rasti tokios sumos modulį, reikia sudėti dėmenų modulius. Pavyzdžiui, $(+12) + (+8) = +20$; $(-12) + (-8) = -20$.

Priešingų ženklų dviejų skaičių suma yra skaičius, turintis tą patį ženklą kaip ir dėmuo, kurio modulis didesnis; norint rasti tokios sumos modulį, reikia iš didesniojo modulio atimti mažesnįjį. Pavyzdžiui, $(+12) + (-8) = +(12-8) = 4$; $(-12) + (+8) = -(12-8) = -4$.

Norint iš vieno skaičiaus atimti kitą, reikia prie turinio pridėti skaičių, priešingą atėminiui. Pavyzdžiui, $12 - (-8) = 12 + 8 = 20$; $12 - (+8) = 12 + (-8) = 4$.

Dviejų to paties ženklo skaičių sandauga (dalmuo) yra teigiamasis skaičius, o dviejų skaičių, kurių ženklai skirtingi, sandauga (dalmuo) yra neigiamasis skaičius; norint rasti sandaugos (dalmens) modulį, reikia sudauginti (padalyti) tų skaičių modulius. Pavyzdžiui, $(-12) \cdot (-8) = +12 \cdot 8 = 96$; $(-24) : (+3) = -\frac{24}{3} = -8$.

29. Aritmetinių veiksmų su realiaisiais skaičiais savybės.

1^o. $a + b = b + a$.

2^o. $(a + b) + c = a + (b + c)$.

3^o. $a + 0 = a$.

4^o. $a + (-a) = 0$.

5^o. $ab = ba$.

6^o. $(ab)c = a(bc)$.

7^o. $a(b + c) = ab + ac$.

8^o. $a \cdot 1 = a$.

9^o. $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, $a \neq 0$.



Jos kartais vadinamos pagrindiniais algebros dėsniais, ir sakoma, kad 1° ir 5° savybės atitinkamai išreiškia *sudėties perstatymo* ir *daugybės perstatymo* dėsnį, 2° ir 6° savybės — *jungimo* dėsnį, o 7° savybė — daugybės *skirstymo* sudėties atžvilgiu dėsnį.

30. Proporcijos. Sakykime, kad a, b, c, d — realieji skaičiai, kurių nė vienas nelygus 0, ir yra teisinga lygybė $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Tokią lygybę vadiname *proporcija*, skaičius a ir d — *kraštiniais* proporcijos nariais, b ir c — *viduriniais* proporcijos nariais.

Pavyzdžiui, galima sudaryti proporciją iš skaičių 2,5; -4; -5 ir 8:

$$\frac{2,5}{-4} = \frac{-5}{8}.$$

Teisingi tokie teiginiai:

- 1.11 t. | Proporcijos kraštinių narių sandauga lygi jos vidurinių narių sandaugai.
- 1.12 t. | Kraštinius proporcijos narius galima sukeisti vietomis, t. y. kai $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, tai $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$.
- 1.13 t. | Vidurinius proporcijos narius galima sukeisti vietomis, t. y. kai $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, tai $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

31. Laipsnis su natūraliuoju rodikliu. 5 skyrelyje buvo apibrėžta natūraliojo skaičiaus laipsnio su natūraliuoju rodikliu sąvoka. Dabar ją apibendrinsime, kai laipsnio pagrindas yra bet kuris realusis skaičius. Imkime realųjį skaičių a ir natūralųjį skaičių n , didesnį už vienetą. *Skaičiaus a n -tuoju laipsniu* vadiname sandaugą n dauginamųjų, kurių kiekvienas lygus a , t. y. $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ dauginamųjų}}$.

Kai $n=1$, laikome, kad $a^1 = a$. Skaičių a vadiname *laipsnio pagrindu*, n — *laipsnio rodikliu*.

Pavyzdžiui, $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{81}$.

Teisingos tokios laipsnio su natūraliuoju rodikliu savybės:

1^o. $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$.

2^o. $a^n : a^k = a^{n-k}$, kai $n > k$.

3^o. $(a^n)^k = a^{nk}$.

4^o. $a^n \cdot b^n = (ab)^n$.

5^o. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, $b \neq 0$.

Pavyzdžiui, $2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$; $(2^3)^5 = 2^{3 \cdot 5} = 2^{15}$; $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$.

32. Laipsnis su nuliniu rodikliu. Laipsnis su neigiamuoju sveikuoju rodikliu. Susitarkime, kad $a^0=1$, 'kai $a \neq 0$. Pavyzdžiui, $(2,7)^0=1$; $(-5)^0=1$. Skaičiaus 0 nulinis laipsnis neturi prasmės. Apibrėžkime, kad

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},$$

kai $a \neq 0$ ir n — natūralusis skaičius.

Pavyzdžiui, $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$; $(-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$.

Teisinga lygybė

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

33. Teigiamojo realiojo skaičiaus standartinė išraiška. Kiekvieną teigiamąjį skaičių a galima išreikšti taip: $a_1 \cdot 10^n$; čia $1 \leq a_1 < 10$, n — sveikasis skaičius.

1 pavyzdys. Imkime $a=395$, tada $a=3,95 \cdot 10^2$; čia $a_1=3,95$ ir $n=2$.

2 pavyzdys. Imkime $a=4,13$, tada $a=4,13 \cdot 10^0$; čia $a_1=4,13$ ir $n=0$.

3 pavyzdys. Imkime $a=0,0023$, tada $a=2,3 \cdot 10^{-3}$; čia $a_1=2,3$ ir $n=-3$.

Kai teigiamasis skaičius a išreikštas sandauga $a_1 \cdot 10^n$, ir $1 \leq a_1 < 10$, o n — sveikasis skaičius, tai sakoma, kad skaičius a parašytas *standartine išraiška*; rodiklį n vadiname skaičiaus *eile*.

Norint gauti teigiamojo skaičiaus a standartinę išraišką, reikia taip padėti kablelį, kad sveikojoje dalyje būtų vienas reikšminis skaitmuo (žr. 13 skyrelį), ir padauginti gautąjį skaičių iš tokio dešimties laipsnio, kad rezultato kablelis grįžtų į tą vietą, kurioje jis buvo skaičiuje a . Taip ir darėme 1—3 pavyzdžiuose.

1 pavyzdyje atskyrėme skaičiaus 395 pirmą reikšminį skaitmenį ir gavome 3,95; norint grįžti prie pradinio skaičiaus, kablelį reikia perkelti per du skaitmenis į dešinę, o tai yra tas pat, kas ir padauginti iš 10^2 . Vadinasi, $395=3,95 \cdot 10^2$.

2 pavyzdyje kableliu jau atskirtas vienas reikšminis skaitmuo, todėl $4,13=4,13 \cdot 10^0$.

3 pavyzdyje atskyrėme skaičiaus 0,0023 pirmą reikšminį skaitmenį ir gavome 2,3; norint grįžti prie pradinio skaičiaus, kablelį reikia perkelti per tris skaitmenis į kairę, o tai tas pat, kas padalyti iš 10^3 ar padauginti iš 10^{-3} . Vadinasi, $0,0023=2,3 \cdot 10^{-3}$.

34. Aritmetinės šaknies apibrėžimas. Kai $a \geq 0$, o n — didesnis už 1 natūralusis skaičius, tai yra tik vienas toks neneigiamasis x , kad teisinga lygybė $x^n=a$. Tą skaičių x vadiname n -tojo laipsnio *aritmetine šaknimi* iš neneigiamojo skaičiaus a ir žymime



$\sqrt[n]{a}$. Skaičių a vadiname *pošaknio skaičiumi*, n — *šaknies rodikliu*. Kai $n=2$, tai paprastai rašome $\sqrt{a}$ (šaknies rodiklį praleidžiame), ir tą reiškinį vadiname *kvadratine šaknimi*. Dažnai vietoj termino „šaknis“ vartojamas terminas „radikalas“.

Remiantis apibrėžimu, užrašas $\sqrt[n]{a}=x$, kai $a \geq 0$, reiškia: pirma, kad $x \geq 0$, ir, antra, kad $x^n=a$, t. y.

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Pavyzdžiui, $\sqrt{49}=7$, $\sqrt[3]{125}=5$, $\sqrt[10]{0}=0$.

35. Aritmetinių šaknų savybės. Kai $a \geq 0$ ir $b \geq 0$, tai teisingos tokios savybės:

$$1^0. \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}.$$

$$2^0. \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad b \neq 0.$$

$$3^0. (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}.$$

$$4^0. \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

$$5^0. \sqrt[nm]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^k}.$$

1^o savybė tinka bet kuriam dauginamųjų skaičiui. Pavyzdžiui,
 $\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 125} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{125} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30.$

P a v y z d y s. Pertvarkykime: a) $\sqrt[5]{7 \frac{19}{32}}$; b) $(\sqrt{a^2})^3$;
 c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}$; d) $\sqrt[6]{a^4}.$

S p r e n d i m a s.

$$a) \sqrt[5]{7 \frac{19}{32}} = \sqrt[5]{\frac{243}{32}} = \sqrt[5]{\frac{243}{32}} = \frac{3}{2}; \quad b) (\sqrt{a^2})^3 = \sqrt{(a^2)^3} = \sqrt{a^6};$$

$$c) \sqrt[4]{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[4 \cdot 3]{a} = \sqrt[12]{a}; \quad d) \sqrt[6]{a^4} = \sqrt[3]{a^2}$$

(šaknies ir pošaknio reiškinio rodiklius padalijome iš 2).



36. Nelyginio laipsnio šaknis iš neigiamojo skaičiaus. Sakykime, kad $a < 0$, o n — natūralusis skaičius, didesnis už 1. Kai n — lyginis skaičius, tai lygybė $x^n = a$ neteisinga, kad ir kokia būtų realioji x reikšmė. Tai reiškia, kad realiųjų skaičių srityje negalima apibrėžti lyginio laipsnio šaknies iš neigiamojo skaičiaus. Kai n — nelyginis skaičius, tai yra tik vienas toks realusis skaičius x , kad $x^n = a$; tą skaičių žymime $\sqrt[n]{a}$ ir vadiname *n-tojo laipsnio šaknimi iš neigiamojo skaičiaus a*.

Pavyzdžiui, $\sqrt[3]{-8} = -2$, nes $(-2)^3 = -8$; $\sqrt[5]{-243} = -3$, nes $(-3)^5 = -243$.

Kai šaknų laipsniai nelyginiai, tai šaknų savybės, kurios buvo teisingos neneigiamiesiems pošaknio reiškiniams (žr. 35 skyrelį), teisingos ir neigiamosioms pošaknio reiškinėms.

Pavyzdžiui, su visomis a ir b reikšmėmis $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

37. Laipsnis su trupmeniniu rodikliu. Suformuluosime tokį apibrėžimą: kai $a \geq 0$, o m ir n — natūralieji skaičiai, $n \geq 2$, tai

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m};$$

kai $a > 0$, tai

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}.$$

Neigiamojo skaičiaus nesveikasis laipsnis neturi prasmės.

P a v y z d y s. Apskaičiuokime $8^{\frac{1}{3}}$, $81^{\frac{3}{4}}$, $4^{-\frac{1}{2}}$.

S p r e n d i m a s. $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$;

$$81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = \sqrt[4]{(3^4)^3} = \sqrt[4]{3^{12}} = 3^3 = 27;$$

$$4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}.$$

38. Laipsnių su racionaliaisiais rodikliais savybės. Jau apibrėžta bet kokio skaičiaus a kėlimo natūraliuoju laipsniu operacija (žr. 31 skyrelį); apibrėžta bet kokio skaičiaus $a \neq 0$ kėlimo nuliniu ir sveikuoju neigiamuoju laipsniu operacija (žr. 32 skyrelį); apibrėžta bet kokio skaičiaus $a \geq 0$ kėlimo teigiamuoju trupmeniniu laipsniu operacija (žr. 37 skyrelį); pagaliau, apibrėžta bet kokio $a > 0$ kėlimo neigiamuoju trupmeniniu laipsniu operacija (žr. 37 skyrelį).



P a v y z d y s. Apskaičiuokime $(6,25)^{0,5} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^{0,25} - (-4)^{-1} \cdot (0,343)^0$.
S p r e n d i m a s.

$$(6,25)^{0,5} = \left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}; \quad \left(\frac{1}{16}\right)^{0,25} = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2};$$

$$(-4)^{-1} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}; \quad (0,343)^0 = 1.$$

Vadinasi,

$$(6,25)^{0,5} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^{0,25} - (-4)^{-1} \cdot (0,343)^0 = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 1 = 1,5.$$

Kai $a > 0$, $b > 0$, o r_1 , r_2 — bet kurie racionalieji skaičiai, tai:

$$1^0. \quad a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2}.$$

$$2^0. \quad a^{r_1} : a^{r_2} = a^{r_1-r_2}.$$

$$3^0. \quad (a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 \cdot r_2}.$$

$$4^0. \quad a^{r_1} \cdot b^{r_1} = (ab)^{r_1}.$$

$$5^0. \quad \frac{a^{r_1}}{b^{r_1}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{r_1}.$$

39. Apytikslės skaičių reikšmės. Absoliučioji ir santykinė paklaidos. Apvalindami dešimtainę trupmeną iki kurio nors skyriaus, visus po to skyriaus einančius skaitmenis keičiame nuliais, o jeigu tie skaitmenys yra po kablelio, tai juos atmetame. Jeigu pirmas po to skyriaus einantis skaitmuo didesnis už 5 ar lygus 5, tai paskutinį likusį skaitmenį padidiname vienetu. Jeigu pirmas po to skyriaus einantis skaitmuo mažesnis už 5, tai paskutinio skaitmens nekeičiame.

1 p a v y z d y s. Suapvalinkime skaičių $\alpha = 2471,05624$ iki a) dešimčių; b) vienetų; c) dešimtųjų; d) šimtųjų; e) tūkstantųjų.

S p r e n d i m a s. a) Vienetų skaitmuo, einantis po dešimčių skyriaus, yra 1, t. y. mažesnis už 5. Vadinasi, suapvalinę iki dešimčių gauname $\alpha \approx 2470$. Ženklą $\approx$ vadiname *apytikslės lygybės ženklu*.

b) Dešimtųjų skaitmuo yra 0, todėl suapvalinę iki vienetų gauname $\alpha \approx 2471$.

c) Šimtųjų skaitmuo yra 5, todėl suapvalinę iki dešimtųjų turime $\alpha \approx 2471,1$.

d) Tūkstantųjų skaitmuo yra 6, todėl suapvalinę iki šimtųjų gauname $\alpha \approx 2471,06$.

e) Dešimt tūkstantųjų skaitmuo yra 2, todėl suapvalinę iki tūkstantųjų gauname $\alpha \approx 2471,056$.

Visas rastąsias reikšmes vadiname skaičiaus $\alpha = 2471,05624$ *apytikslėmis reikšmėmis*.



Apytikslų reikšmių prireikia ne tik apvalinant skaičius. Dažniausiai jos gaunamos matuojant (ilgį, masę, temperatūrą ir pan.). Tada svarbu žinoti, kuriuo tikslumu išmatuota.

Sakykime, kad a — skaičiaus a apytikslė reikšmė. Tada skaičių a ir a skirtumo modulį, t. y. $|a - a|$, vadiname skaičiaus a apytikslės reikšmės *absoliučiąja paklaida*. Absoliučiosios paklaidos ir apytikslės reikšmės modulio santykį vadiname apytikslės reikšmės *santykinę paklaida*. Santykinę paklaidą dažniausiai reiškiamo procentais.

2 p a v y z d y s. Svarstyklių skalės padalos vertė yra 0,1 g. Jomis pasvėrus detalę, kurios masė lygi 54,12705 g, gauta masės apytikslė reikšmė 54,1 g. Raskime tos apytikslės reikšmės absoliučiąją ir santykinę paklaidą.

S p r e n d i m a s. Absoliučioji paklaida lygi $54,12705 - 54,1 = 0,02705$.

Santykinę paklaidą lygi $\frac{0,02705}{54,1} \cdot 100\% = 0,05\%$.

Beveik visada matuojamo dydžio tikslios reikšmės nežinome. Todėl svarbu žinoti apytikslės reikšmės absoliučiąją paklaidą. Pavyzdžiui, jeigu masės m detalę pasvėrėme svarstyklėmis, kurių skalės padalos vertė lygi 0,1 g, tai reiškia, kad matavimo absoliučioji paklaida bus ne didesnė už 0,1 g. Konkrečiai, jeigu pasvėrė detalę gavome 54,1 g, tai masės m tikslė reikšmė gali nukrypti nuo 54,1 į vieną ar kitą pusę ne daugiau kaip 0,1, t. y. $54,1 - 0,1 \leq m \leq 54,1 + 0,1$. Trumpiau tai užrašome taip: $m = 54,1 \pm 0,1$.

Apskritai, jeigu mus dominančio skaičiaus a rastos apytikslės reikšmės a absoliučioji paklaida yra ne didesnė kaip tam tikras skaičius h , tai rašome $a = a \pm h$; sakome, kad a — skaičiaus a apytikslė reikšmė h tikslumu.

3 p a v y z d y s. Raskime skaičiaus $a = 2471,05624$ apytikslę reikšmę 0,01 tikslumu.

S p r e n d i m a s. Suapvalinę skaičių a iki šimtųjų, gauname (žr. 1d pavyzdį) $a = 2471,06$.

Sios apytikslės reikšmės absoliučioji paklaida lygi

$$|2471,05624 - 2471,06| = 0,00376 < 0,01.$$

Vadinasi, 2471,06 — skaičiaus a apytikslė reikšmė 0,01 tikslumu.

Matematinėse lentelėse paprastai pateikiamos dydžių apytikslės reikšmės. Tada absoliučioji paklaida ne didesnė už paskutinio skyriaus vieneto pusę. Pavyzdžiui, radę lentelėje skaičiaus $\sqrt{2}$ reikšmę 1,4142, turime suprasti, kad tai — apytikslė reikšmė 0,0001 tikslumu, t. y. kad jos absoliučioji paklaida ne didesnė už 0,00005:

$$\sqrt{2} = 1,4142 \pm 0,00005.$$



40. Realiojo skaičiaus dešimtainiai artiniai su trūkumu ir su pertekliumi. Imkime iracionalųjį skaičių $\sqrt{2}$. Turime:

$$\begin{array}{ll} 1^2 < 2 < 2^2 & 1 < \sqrt{2} < 2 \\ 1,4^2 < 2 < 1,5^2 & 1,4 < \sqrt{2} < 1,5 \\ 1,41^2 < 2 < 1,42^2 & 1,41 < \sqrt{2} < 1,42 \\ 1,414^2 < 2 < 1,415^2 & 1,414 < \sqrt{2} < 1,415 \\ 1,4142^2 < 2 < 1,4143^2 & 1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143 \end{array}$$

Skaičiai 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142 vadinami *skaičiaus $\sqrt{2}$ dešimtainiais artiniais su trūkumu* atitinkamai 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001 tikslumu. Skaičiai 2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143 vadinami *skaičiaus $\sqrt{2}$ dešimtainiais artiniais su pertekliumi* atitinkamai tuo pačiu tikslumu.

Skaičių $\sqrt{2}$ galima išreikšti begaline dešimtaine trupmena: $\sqrt{2} = 1,4142\dots$. Apskritai *kiekvieną realųjį skaičių galima išreikšti begaline dešimtaine trupmena, ir ta trupmena yra periodinė, kai skaičius racionalusis (žr. 16 skyrelį), ir neperiodinė, kai skaičius iracionalusis.*

Pavyzdžiui, $\frac{14}{55} = 0,2(54) = 0,2545454\dots$ (žr. 17 skyrelį). Skaičiaus $\frac{14}{55}$ dešimtainis artinys 0,001 tikslumu su trūkumu lygus 0,254, o su pertekliumi — lygus 0,255.

Skaičius $\pi = 3,1415926\dots$. Jo dešimtainis artinys 0,0001 tikslumu su trūkumu lygus 3,1415, o su pertekliumi — lygus 3,1416.

41*. Kvadratinės šaknies iš natūraliojo skaičiaus traukimo taisyklė. Sakykime, reikia ištraukti kvadratinę šaknį iš natūraliojo skaičiaus m , ir žinoma, kad šaknį galima ištraukti tiksliai. Rezultato kartais patogiau ieškoti pagal tokią taisyklę.

1. Skaičių m suskaidykime į skiltis (iš dešinės į kairę, pradedant nuo paskutinio skaitmens), į kiekvieną skiltį imdami po du greta stovinčius skaitmenis. Aišku, kad jeigu m skaitmenų skaičius lyginis, tai pirmoje (iš kairės) skiltyje bus du skaitmenys, o jeigu m skaitmenų skaičius nelyginis, tai pirma skiltis turi vieną skaitmenį. Skilčių skaičius rodo rezultato skaitmenų skaičių.

2. Parinkime tokį didžiausią skaitmenį, kad jo kvadratas būtų ne didesnis už pirmoje skiltyje esantį skaičių. Tas skaitmuo — rezultato pirmas skaitmuo.

3. Rezultato pirmą skaitmenį kelkime kvadratu, gautąjį skaičių atimkime iš pirmos skilties, prie gauto skirtumo iš dešinės prirašykime antrą skiltį. Gausime tam tikrą skaičių A . Padvigubinę jau turimą rezultato dalį, gauname skaičių a . Dabar parinkime tokį didžiausią skaitmenį x , kad skaičiaus ax ir x sandauga būtų ne didesnė už skaičių A . Skaitmuo x — antras rezultato skaitmuo.



$$\begin{array}{r} -\sqrt{13'83'84}=372 \\ \quad 9 \\ \times \begin{array}{r} 67 \\ 7 \end{array} \overline{) \begin{array}{r} 483 \\ -469 \end{array}} \\ \hline \times \begin{array}{r} 742 \\ 2 \end{array} \overline{) \begin{array}{r} 1484 \\ -1484 \end{array}} \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -\sqrt{4'53'69''}=213 \\ \underline{4} \\ \times 41 \overline{) \begin{array}{r} 53 \\ -41 \\ \hline 1269 \\ -1269 \\ \hline 0 \end{array}} \end{array}$$



Jeigu šaknis neišsitraukia, tai po duotojo skaičiaus paskutinio skaitmens dedame kablelį ir sudarome tolesnes skiltis, kurių kiekviena yra 00. Tada šaknies traukimo procesas begalinis; jis baigiamas, kai pasiekiamas reikiamas tikslumas.

3 pavyzdys. Apskaičiuokime $\sqrt{7}$ 0,01 tikslumu.

Sprendimas.

$$\begin{array}{r} \sqrt{7,00'00'00\dots} = 2,645\dots \\ - \quad 4 \\ \times 46 | - 300 \\ 6 | - 276 \\ \times 524 | - 2400 \\ 4 | - 2096 \\ \times 5285 | - 30400 \\ 5 | - 26425 \\ | 3975 \\ | \dots \end{array}$$

Taigi 0,01 tikslumu gauname $\sqrt{7} \approx 2,65$.

II SKYRIUS. ALGEBRINIAI REIŠKINIAI

§ 4. Pagrindinės sąvokos

42. **Algebrinių reiškinių rūšys.** Iš skaičių ir kintamųjų vartojant sudėties, atimties, daugybos, dalybos, kėlimo racionaliųjų laipsnių, šaknies traukimo ženklus ir skliaustus sudaromi *algebriniai reiškiniai*.

Algebrinių reiškinių pavyzdžiai:

- 1) $2a^2b - 3ab^2(a+b)$; 2) $a+b+\frac{c}{5}$; 3) $\frac{3a^2+3a+1}{a-1}$;
4) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{c}{3}\right)^3$; 5) $\sqrt{a+b}$; 6) $(\sqrt{2}-x)^4$; 7) $a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}$.

Algebrinis reiškinys, kuriame nedalijama iš kintamųjų ir ne-traukiama šaknis iš kintamųjų (taip pat ir nekeliama laipsniu su trupmeniniu rodikliu), vadinamas *sveikuoju*. Iš parašytųjų sveikieji yra 1, 2 ir 6 reiškiniai.

Algebrinis reiškinys, kuris sudarytas iš skaičių ir kintamųjų vartojant sudėties, atimties, daugybos, kėlimo laipsniu su natūraliuoju rodikliu ir dalybos veiksmus, kai dalijama iš reiškinių su kintamaisiais, vadinamas *trupmeniniu*. Iš aukščiau parašytų reiškinių trupmeniniai yra 3 ir 4 reiškiniai.



Sveikieji ir trupmeniniai reiškiniai vadinami *racionaliaisiais reiškiniais*. Iš aukščiau parašytų racionalieji yra 1, 2, 3, 4 ir 6 reiškiniai.

Algebrinis reiškinys, kuriame traukiama šaknis iš kintamųjų (ar kintamieji keliama trupmeniniu laipsniu), vadinamas *iracionaliuoju*. Iš aukščiau parašytų iracionalieji yra 5 ir 7 reiškiniai.

Taigi algebriniai reiškiniai gali būti racionalieji ir iracionalieji. Racionalieji reiškiniai savo ruožtu skirstomi į sveikuosius ir trupmeninius.

43. Leistinosios kintamųjų reikšmės. Algebrinio reiškinio apibrėžimo sritis. Kintamųjų reikšmės, su kuriomis algebrinis reiškinys turi prasmę, vadinamos *leistinosiomis kintamųjų reikšmėmis*. Visų leistinųjų kintamųjų reikšmių aibė vadinama *algebrinio reiškinio apibrėžimo sritimi*.

Sveikasis reiškinys turi prasmę su visomis į jį įeinančių kintamųjų reikšmėmis. Taigi su visomis kintamųjų reikšmėmis turi prasmę 42 skyrelio 1, 2, 6 reiškiniai.

Trupmeniniai reiškiniai neturi prasmės su tomis kintamųjų reikšmėmis, su kuriomis vardiklis virsta nuliu. Taigi 42 skyrelio 3 trupmeninis reiškinys turi prasmę su visais a , išskyrus $a=1$, o 4 trupmeninis reiškinys turi prasmę su visais a, b, c , išskyrus reikšmes $a=0$ ir $b=0$.

Iracionalusis reiškinys neturi prasmės su tomis kintamųjų reikšmėmis, su kuriomis neigiamuoju skaičiumi virsta reiškinys, esantis po lyginio laipsnio šaknies ženklui arba po kėlimo trupmeniniu laipsniu ženklui. Taigi 5 iracionalusis reiškinys turi prasmę tik su tais a, b , su kuriais $a+b \geq 0$, o 7 iracionalusis reiškinys turi prasmę tik kai $a \geq 0$ ir $b \geq 0$ (žr. 42 skyrelį).

Jeigu algebriniame reiškinyje kintamiesiems suteiksime leistinas reikšmes, tai gausime skaitinį reiškinį; jo reikšmę vadiname *algebrinio reiškinio reikšme* su pasirinktomis kintamųjų reikšmėmis.

P a v y z d y s. Raskime reiškinio $\sqrt[3]{\frac{a^3+b}{2a-b}}$ reikšmę, kai $a=5$, $b=2$.

S p r e n d i m a s. Turime: $\frac{\sqrt[3]{5^3+2}}{2 \cdot 5 - 2} = \frac{\sqrt[3]{27}}{10-2} = \frac{3}{8}$.

44. Tapatusis reiškinio pertvarkymas. Tapatybė. Nagrinėkime du reiškinius: $f(x)=x^2-2x$ ir $g(x)=4x-5$. Kai $x=2$, turime $f(2)=2^2-2 \cdot 2=0$; $g(2)=4 \cdot 2-5=3$. Skaičiai 0 ir 3 vadinami



reiškinių $x^2 - 2x$ ir $4x - 5$ atitinkamosiomis reikšmėmis, kai $x = 2$. Raskime atitinkamąsias tų reiškinių reikšmes, kai $x = 1$:

$$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1; \quad g(1) = 4 \cdot 1 - 5 = -1;$$

kai $x = 0$:

$$f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 = 0; \quad g(0) = 4 \cdot 0 - 5 = -5.$$

Atitinkamosios dviejų reiškinių reikšmės gali būti viena kitai lygios (nagrinėjamame pavyzdyje teisinga lygybė $f(1) = g(1)$), o gali ir skirtis (nagrinėjamame pavyzdyje $f(2) \neq g(2)$; $f(0) \neq g(0)$).

Jeigu dviejų reiškinių, turinčių tuos pačius kintamuosius, atitinkamosios reikšmės sutampa su visomis leistinosiomis kintamųjų reikšmėmis, tai reiškiniai vadinami *tapačiais lygiais*.

Tapatybe vadinama lygybė, kuri yra teisinga su visomis į ją įeinančių kintamųjų leistinosiomis reikšmėmis.

Tapačiai lygių reiškinių pavyzdžiai: x^5 ir $x^3 \cdot x^2$, $a + b + c$ ir $c + b + a$, $(2ab)^2$ ir $4a^2b^2$.

Tapatybių pavyzdžiai:

$$\begin{aligned} a + b &= b + a, \\ a + 0 &= a, \\ (a + b)c &= ac + bc, \\ a \cdot 1 &= a, \\ x^5 &= x^2 \cdot x^3. \end{aligned}$$

Proporcija (žr. 30 skyrelį) $\frac{2a}{a-1} = \frac{10a}{5(a-1)}$ yra tapatybė, nes lygybė teisinga su visomis a reikšmėmis, išskyrus $a = 1$; kai $a = 1$, tai trupmenų vardikliai virsta nuliu, t. y. trupmenos neturi prasmės. Suprastinę reiškinį $\frac{ac}{bc}$ iš c , gauname jam tapatų reiškinį $\frac{a}{b}$, nes jų reikšmės sutampa esant visoms leistinosioms jų reikšmėms (kai $b \neq 0$, $c \neq 0$). Kitaip sakant, $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ yra tapatybė (nes lygybė teisinga su visomis kintamųjų reikšmėmis, išskyrus $b = 0$ ir $c = 0$). Teisingos skaitinės lygybės irgi vadinamos tapatybėmis.

Vieno reiškinio keitimas kitu, tapačiai jam lygiu, vadinamas *tapačiuoju reiškinio pertvarkymu*.

§ 5. Sveikieji racionalieji reiškiniai

45. Vienanariai ir operacijos su jais. *Vienanariu* vadiname tokį reiškinį, į kurį įeina skaičiai, kintamųjų natūralieji laipsniai ir jų sandaugos ir kuriame neatliekami jokie kiti veiksmai su skai-



čiais ir kintamaisiais. Pavyzdžiui, $3a \cdot (2,5a^3)$, $(5ab^2) \cdot (0,4c^3d)$, $x^2y \cdot (-2z) \cdot \frac{3}{4}$ — vienanariai, o reiškiniai $a+b$, $\frac{ab}{c}$ nėra vienanariai.

Kiekvienam vienanariui galima suteikti *standartinę išraišką*, t. y. išreikšti jį skaitinio dauginamojo, parašyto pirmoje vietoje, ir skirtingų kintamųjų laipsnių sandauga. Standartinės išraiškos vienanario skaitinį dauginamąjį vadiname *vienanario koeficientu*. Visų kintamųjų laipsnių rodiklių sumą vadiname *vienanario laipsniu*.

Jeigu tarp dviejų vienanarių parašysime daugybos ženklą, tai gausime vienanarį. Jį vadiname pradinių vienanarių *sandauga*. Pakėlę vienanarį natūraliuoju laipsniu, taip pat gauname vienanarį. Jam paprastai suteikiama standartinė išraiška.

Vienanario keitimas standartiniu, vienanarių daugyba yra tapatieji pertvarkymai.

1 p a v y z d y s. Vienanarį $3a \cdot (2,5a^3)$ parašykime standartine išraiška.

S p r e n d i m a s. $3a \cdot (2,5a^3) = (3 \cdot 2,5) \cdot (a \cdot a^3) = 7,5a^4$.

2 p a v y z d y s. Sudauginkime vienanarius $24ab^2cd^3$ ir $\frac{1}{6}a^2b^3c$.

S p r e n d i m a s.

$$(24ab^2cd^3) \cdot \left(\frac{1}{6}a^2b^3c\right) = \left(24 \cdot \frac{1}{6}\right) \cdot (a \cdot a^2) \cdot (b^2 \cdot b^3) \cdot (c \cdot c) \cdot d^3 = 4a^3b^5c^2d^3.$$

3 p a v y z d y s. Vienanarį $(-3ab^2c^3)$ pakelkime kevirtuoju laipsniu.

S p r e n d i m a s. $(-3ab^2c^3)^4 = (-3)^4 \cdot a^4 \cdot (b^2)^4 \cdot (c^3)^4 = 81a^4b^8c^{12}$.

Standartinės išraiškos vienanariai, kurie skiriasi tik koeficientu arba visai nesiskiria, vadinami *panašiaisiais vienanariais*. Juos galima sudėti ir atimti. Tokių vienanarių suma ir skirtumas — vėl vienanaris, panašus į pradinius (kartais gauname 0). Panašiųjų vienanarių sudėtis ir atimtis vadinama *panašiųjų narių sutraukimu*.

4 p a v y z d y s. Sudėkime vienanarius $18x^2yz^3$ ir $-8x^2yz^3$.

S p r e n d i m a s. $18x^2yz^3 + (-8x^2yz^3) = (18 + (-8))x^2yz^3 = 10x^2yz^3$.

46. Daugianariai. Daugianario standartinė išraiška. *Daugianariu* vadiname vienanarių sumą. Visus daugianario narius parašę standartine išraiška (žr. 45 skyrelį) ir sutraukę panašiuosius narius, gausime *standartinės išraiškos daugianarį*.

Kiekvieną sveikąjį reiškinį galima pertvarkyti į standartinės išraiškos daugianarį, — toks ir yra sveikųjų reiškinų pertvarkymo (prastinimo) tikslas.



Panagrinėkime pavyzdžių, kuriuose sveikąjį reiškinį reikia pertvarkyti į standartinės išraiškos daugianarį.

1 pavyzdys. $3a \cdot 5b + 3ab + 2a \cdot (-4b) + b \cdot b$.

Sprendimas. Iš pradžių standartinę išraišką suteikime daugianario nariams. Gausime $15ab + 3ab - 8ab + b^2$. Sutraukę panašiuosius narius, gausime standartinės išraiškos daugianarį $10ab + b^2$.

2 pavyzdys. $(3a + 5b - 2c) + (2a - b + 4c)$.

Sprendimas. Kai prieš skliaustus yra pliuso ženklas, skliaustus galima praleisti, palikus visų susklostų dėmenų ženklus. Taikydami šią atskliautimo taisyklę, gauname: $3a + 5b - 2c + 2a - b + 4c$,

$$(3a + 2a) + (5b - b) + (-2c + 4c) = 5a + 4b + 2c.$$

3 pavyzdys. $(5a^2b + ab^2) - (3a^2b - 4ab^2)$.

Sprendimas. Kai prieš skliaustus yra minuso ženklas, tai skliaustus galima praleisti, pakeitus priešingais visų susklostų dėmenų ženklus. Taikydami šią atskliautimo taisyklę, gauname:

$$5a^2b + ab^2 - 3a^2b + 4ab^2 = (5a^2b - 3a^2b) + (ab^2 + 4ab^2) = 2a^2b + 5ab^2.$$

4 pavyzdys. $4x^2 \left(x - \frac{1}{2}x^2 + 3 \right)$.

Sprendimas. Remiantis skirstymo dėsniu, vienanario ir daugianario sandauga lygi to vienanario ir daugianario kiekvieno nario sandaugų sumai. Gauname:

$$4x^2 \left(x - \frac{1}{2}x^2 + 3 \right) = 4x^2 \cdot x - 4x^2 \cdot \frac{1}{2}x^2 + 4x^2 \cdot 3 = 4x^3 - 2x^4 + 12x^2.$$

5 pavyzdys. $(a + b)(a - b)$.

Sprendimas. Turime $(a + b)(a - b) = (a + b) \cdot a + (a + b) \times (-b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$.

6 pavyzdys. $(2x^2y + 3xy^2)(2x + 3y + 1)$.

Sprendimas. Turime $2x^2y(2x + 3y + 1) + 3xy^2(2x + 3y + 1) = (4x^3y + 6x^2y^2 + 2x^2y) + (6x^2y^2 + 9xy^3 + 3xy^2) = 4x^3y + 6x^2y^2 + 2x^2y + 6x^2y^2 + 9xy^3 + 3xy^2$.

Dabar sutraukiame panašiuosius narius (jie pabraukti). Gauname:

$$4x^3y + 12x^2y^2 + 2x^2y + 9xy^3 + 3xy^2.$$

47. Greitosios daugybos formulės. Dažnai pertvarkant sveikąjį reiškinį į standartinės išraiškos daugianarį taikomos tapatybės:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2. \quad (1)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2. \quad (2)$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2. \quad (3)$$



$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3. \quad (4)$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3. \quad (5)$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \quad (6)$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3. \quad (7)$$

Tos tapatybės vadinamos *greitosios daugybos formulėmis*.

Panagrinėkime pavyzdžių, kai reiškinį reikia pertvarkyti į standartinės išraiškos dauginarį.

1 pavyzdys. $(3x^2+4y^3)(3x^2-4y^3)$.

Sprendimas. Pritaikę (1) formulę, gauname:

$$(3x^2)^2 - (4y^3)^2 = 9x^4 - 16y^6.$$

2 pavyzdys. $(a+b-c)(a+b+c)$.

Sprendimas. $(a+b-c)(a+b+c) = ((a+b)-c)((a+b)+c) = (a+b)^2 - c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - c^2$.

3 pavyzdys. $(3a^2-5b^3)^2$.

Sprendimas. Taikome (3) formulę:

$$(3a^2)^2 - 2 \cdot 3a^2 \cdot 5b^3 + (5b^3)^2 = 9a^4 - 30a^2b^3 + 25b^6.$$

4 pavyzdys. $(3a+1)(9a^2-3a+1)$.

Sprendimas. Taikome (4) formulę:

$$(3a)^3 + 1 = 27a^3 + 1.$$

48. Dauginarių skaidymas dauginamaisiais. Kartais dauginarį pavyksta išreikšti kelių dauginamųjų — dauginarių ar vienanarių — sandauga. Tokį pertvarkymą vadiname *daugianario skaidymu dauginamaisiais*. Tada sakoma, kad dauginaris dalijasi iš kiekvieno tų dauginamųjų.

Išnagrinėsime keletą dauginarių skaidymo dauginamaisiais būdų.

1) *Bendro dauginamojo iškėlimas už skliaustų*. Šis pertvarkymas yra tiesioginė skirstymo dėsnio išvada (kad būtų aiškiau, dėsni reikia perrašyti „iš dešinės į kairę“):

$$ac + bc = c(a+b).$$

1 pavyzdys. Išskaidykime dauginamaisiais dauginarį $28x^3 - 35x^4$.

Sprendimas. $28x^3 - 35x^4 = 7x^3 \cdot 4 - 7x^3 \cdot 5x = 7x^3(4 - 5x)$.

Paprastai, iškeliant bendrą dauginamąjį už skliaustų, kiekvienas kintamasis, kuris įeina į visus dauginario narius, iškeliamas su mažiausiu rodikliu, kurį tas kintamasis turi dauginaryje. Kai visi dauginario koeficientai — sveikieji skaičiai, tai bendro dauginamojo koeficientu imamas visų dauginario koeficientų didžiausias.



2) *Greitosios daugybos formulių taikymas*. 47 skyrelio (1) — (7) formulės, perskaitytos „iš dešinės į kairę“, dažnai naudingos skaidant dauginarius dauginamaisiais.

2 p a v y z d y s. Išskaidykime dauginamaisiais $x^6 - 1$.

S p r e n d i m a s. Turime $x^6 - 1 = (x^3)^2 - 1^2$. Pritaikę (1) formulę (kvadratų skirtumo), gauname $(x^3 + 1)(x^3 - 1)$. Dabar taikome (4) ir (5) formules (kubų sumos, kubų skirtumo):

$$(x + 1)(x^2 - x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1).$$

Taigi

$$x^6 - 1 = (x + 1)(x - 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$$

3 p a v y z d y s. $4a^4b^3 + 16a^3b^4 + 16a^2b^5$.

S p r e n d i m a s. Iš pradžių iškelkime už skliaustų bendrą dauginamąjį. Randame koeficientų 4, 16, 16 didžiausiąjį bendrąjį daliklį ir mažiausius laipsnių rodiklius, su kuriais kintamieji a ir b įeina į dauginarį sudarančius vienanarius. Turime:

$$4a^2b^3(a^2 + 4ab + 4b^2).$$

Kadangi, remiantis (2) formule, $a^2 + 4ab + 4b^2 = (a + 2b)^2$, tai $4a^4b^3 + 16a^3b^4 + 16a^2b^5 = 4a^2b^3(a + 2b)^2$.

3) *Grupavimo būdas*. Jis remiasi tuo, kad sudėties keitimo ir jungimo dėsniai leidžia įvairiai grupuoti dauginario narius. Kartais pavyksta juos sugrupuoti taip, kad iškelus kiekvienoje grupėje bendrus dauginamuosius, visų grupių skliaustuose lieka tas pats dauginaris. Jį savo ruožtu, kaip bendrą dauginamąjį, galima išskelti už skliaustų. Išnagrinėkime dauginario skaidymo grupuojant pavyzdžių.

4 p a v y z d y s. $x^3 - 3x^2 + 5x - 15$.

S p r e n d i m a s. Grupukime taip:

$$(x^3 - 3x^2) + (5x - 15).$$

Pirmoje grupėje už skliaustų iškelkime bendrą dauginamąjį x^2 , antroje — bendrą dauginamąjį 5. Gausime $x^2(x - 3) + 5(x - 3)$. Dabar dauginarį $(x - 3)$, kaip bendrą dauginamąjį, iškelkime už skliaustų: $(x - 3)(x^2 + 5)$. Taigi

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 15 = (x - 3)(x^2 + 5).$$

5 p a v y z d y s. $20x^2 + 3yz - 15xy - 4xz$.

S p r e n d i m a s. $20x^2 + 3yz - 15xy - 4xz = (20x^2 - 15xy) + (3yz - 4xz) = 5x(4x - 3y) - z(4x - 3y) = (4x - 3y)(5x - z)$.

6 p a v y z d y s. $a^2 - 7ab + 12b^2$.

S p r e n d i m a s. Čia jokių grupavimų negalima pasiekti, kad visose grupėse atsirastų tas pats dauginaris. Tokiais atvejais kartais pravartu kurį nors dauginario narį išreikšti tam tikra



suma, o po to vėl bandyti grupuoti. Mūsų pavyzdyje pravartu $-7ab$ parašyti kaip sumą $-3ab-4ab$. Gauname:

$$a^2 - 7ab + 12b^2 = a^2 - 3ab - 4ab + 12b^2 = (a^2 - 3ab) - (4ab - 12b^2) = \\ = a(a - 3b) - 4b(a - 3b) = (a - 3b)(a - 4b).$$

7 pavyzdys. $x^4 + 4y^4$.

Sprendimas. Pridėkime ir atimkime vienanarį $4x^2y^2$. Tada

$$x^4 + 4y^4 = (x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4) - 4x^2y^2 = (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 = \\ = (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy).$$

49. Vieno kintamojo daugianariai. Daugianarį $ax+b$, kai a , b — skaičiai ($a \neq 0$), o x — kintamasis, vadiname *pirmojo laipsnio daugianariu*; daugianarį ax^2+bx+c , kai a , b , c — skaičiai ($a \neq 0$), o x — kintamasis, vadiname *antrojo laipsnio daugianariu*, arba *kvadratinio trinariu*; daugianarį ax^3+bx^2+cx+d , kai a , b , c , d — skaičiai ($a \neq 0$), o x — kintamasis, vadiname *trečiojo laipsnio daugianariu*.

Apskritai, kai a , b , c , ..., d , m — skaičiai ($a \neq 0$), o x — kintamasis, tai daugianarį

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + dx + m$$

vadiname *n-tojo laipsnio daugianariu*; ax^n , bx^{n-1} , ..., dx , m — daugianario nariai, a , b , c , ..., d , m — koeficientai, ax^n — *vyriausiasis narys*, a — vyriausiojo nario koeficientas, m — daugianario *laisvasis narys*. Dažniausiai daugianaris rašomas mažėjančiais kintamojo laipsniais, t. y. kintamojo x laipsniai palaipsniui mažėja; tada pirmoje vietoje — vyriausiasis narys, paskutinėje — laisvasis narys. *Daugianario laipsnis* — tai vyriausiojo nario laipsnis.

Pavyzdžiui, $5x^5 - 2x^3 + 3x^2 + 1$ — penktojo laipsnio daugianaris, čia $5x^5$ — vyriausiasis narys, 1 — laisvasis daugianario narys.

Daugianario $P(x)$ šaknimis vadiname tokią kintamojo x reikšmę, su kuria daugianaris virsta nuliu. Pavyzdžiui, skaičius 2 yra daugianario $P(x) = x^3 + 2x^2 - 7x - 2$ šaknis, nes $P(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 - 2 = 0$.

50. Kvadratinio trinario skaidymas tiesiniais dauginamaisiais.

Jeigu x_1 ir x_2 — kvadratinio trinario ax^2+bx+c šaknys (t. y. lygties $ax^2+bx+c=0$ šaknys), tai

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Si formulė taikoma kvadratinį trinariį skaidant dauginamaisiais.

Pavyzdys. Išskaidykime dauginamaisiais $6x^2 - x - 2$.

Sprendimas. Pritaikę kvadratinės lygties šaknų formulę

(žr. 101 skyrelį) lygčiai $6x^2 - x - 2 = 0$, randame $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{2}{3}$.



Vadinasi,

$$6x^2 - x - 2 = 6 \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{2}{3}\right) = 2 \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot 3 \left(x - \frac{2}{3}\right) = (2x + 1)(3x - 2).$$

51*. Dvinario kėlimas natūraliuoju laipsniu (Niutono binomas). Siame skyrelyje nagrinėsime, kaip dvinarį (arba binomą) $a + b$ pakelti bet kuriuo natūraliuoju laipsniu.

Kai $n=1$, tai $(a+b)^1 = a+b$.

Kai $n=2$, tai $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Kai $n=3$, tai $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Kadangi $(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b)$, tai lengvai gauname formulę

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Apskritai teisinga tokia formulė (Niutono binomas):

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^{n-3}b^3 + \\ + \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k} a^{n-k}b^k + \dots + b^n.$$

P a v y z d y s. Pakelkime laipsniu $(a+b)^6$.

Pagal Niutono binomo formulę

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} a^4b^2 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3b^3 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^2b^4 + \\ + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} ab^5 + b^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

§ 6. Trupmeniniai racionalieji reiškiniai

52. Racionalioji trupmena ir jos pagrindinė savybė. Kiekvieną trupmeninį reiškinį (42 skyrelis) galima parašyti kaip $\frac{P}{Q}$; čia P ir Q — racionalieji reiškiniai, ir į Q būtinai įeina kintamieji. Tokia trupmena $\frac{P}{Q}$ vadinama *racionaliąja trupmena*.

Racionaliųjų trupmenų pavyzdžiai:

$$\frac{x+1}{2x-\frac{1}{3}}, \quad \frac{(x+2)(x^2-3)}{a+2b+5c}, \quad \frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{a-b}.$$

Pagrindinę trupmenos savybę išreiškia tapatybė $\frac{P}{Q} = \frac{PR}{QR}$, kuri teisinga esant sąlygoms $R \neq 0$ ir $Q \neq 0$; čia R — sveikasis

racionalusis reiškiny. Tai reiškia, kad racionaliosios trupmenos skaitiklį ir vardiklį galima padauginti ir padalyti iš to paties nelygaus nuliui skaičiaus, vienanario ar dauginario.

Pavyzdžiui,

$$\frac{\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1}{\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{2}} = \frac{12\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1\right)}{12\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{2}\right)} = \frac{4x^3 - 6x^2 + 12}{3x^2 + 2x + 6}.$$

Pagrindine trupmenos savybe galima remtis, kai reikia pakeisti trupmenos narių ženklus. Jeigu trupmenos $\frac{P}{Q}$ skaitiklį ir vardiklį padauginsime iš -1 , gausime $\frac{P}{Q} = \frac{-P}{-Q}$. Taigi trupmenos reikšmė nesikeičia, kai vienu metu pakeičiame skaitiklio ir vardiklio ženklus. Kai keičiame tik skaitiklio ar tik vardiklio ženklą, tai ir trupmena pakeičia savo ženklą:

$$\frac{-P}{Q} = -\frac{P}{Q}; \quad \frac{P}{-Q} = -\frac{P}{Q}.$$

Taigi $\frac{P}{Q} = -\frac{-P}{Q} = -\frac{P}{-Q}.$

Pavyzdžiui, $\frac{3x-2}{3x+4} = -\frac{-(3x-2)}{3x+4} = -\frac{2-3x}{3x+4}.$

53. Racionaliųjų trupmenų prastinimas. Suprastinti trupmeną — reiškia trupmenos skaitiklį ir vardiklį padalyti iš bendro daugiklio. Tai daryti leidžia pagrindinė trupmenos savybė.

Norint suprastinti trupmeną, reikia skaitiklį ir vardiklį išskaidyti dauginamaisiais. Jeigu paaiškėja, kad skaitiklis ir vardiklis turi bendrą dauginamųjų, tai juos galima suprastinti. Jeigu bendrų dauginamųjų nėra, tai suprastinti trupmenos nepavyksta.

P a v y z d y s. Suprastinkime trupmeną $\frac{x^2-3xy}{9y^2-x^2}.$

S p r e n d i m a s. Turime

$$x^2-3xy = x(x-3y); \quad 9y^2-x^2 = -(x^2-9y^2) = -(x-3y)(x+3y).$$

Vadinasi,

$$\frac{x^2-3xy}{9y^2-x^2} = \frac{x(x-3y)}{-(x-3y)(x+3y)} = -\frac{x}{x+3y}.$$

54. Racionaliųjų trupmenų bendravardiklinimas. Kelių trupmenų *bendruoju vardikliu* vadinamas sveikasis racionalusis reiškiny, kuris dalijasi iš kiekvienos trupmenos vardiklio (žr. 48 skyrelį).

Pavyzdžiui, trupmenų $\frac{x}{x+2}$ ir $\frac{3x-1}{x-2}$ bendrasis vardiklis yra sandauga $(x+2)(x-2)$, nes ji dalijasi ir iš $x+2$, ir iš $x-2$;



bet bendrasis vardiklis taip pat yra tiek reiškiny $3(x+2)(x-2)$, tiek reiškiny $x(x+2)(x-2)$, tiek ir reiškiny $5x^2(x+2)^2(x-2)^3$ ir pan. Paprastai imamas toks bendrasis vardiklis, kad bet kuris kitas bendrasis vardiklis iš jo dalytųsi. Toks paprasčiausias vardiklis kartais vadinamas *mažiausiuoju bendruoju vardikliu*.

Išnagrinėtame pavyzdyje bendrasis vardiklis yra $(x+2)(x-2)$. Taigi

$$\frac{x}{x+2} = \frac{x(x-2)}{(x+2)(x-2)}; \quad \frac{3x+1}{x-2} = \frac{(3x-1)(x+2)}{(x+2)(x-2)}.$$

Duotas trupmenas subendravardiklinome, padauginę pirmos trupmenos skaitiklį ir vardiklį iš $x-2$, o antros trupmenos skaitiklį ir vardiklį — iš $x+2$. Daugianarius $x-2$ ir $x+2$ vadiname atitinkamai pirmos ir antros trupmenos *papildomaisiais daugikliais*. Trupmenos papildomąjį daugiklį randame, padaliję bendrąjį vardiklį iš tos trupmenos vardiklio.

Norint subendravardiklinti kelias racionaliąsias trupmenas, reikia:

- 1) kiekvienos trupmenos vardiklį išskaidyti dauginamaisiais;
- 2) sudaryti bendrąjį vardiklį, įtraukiant į jį 1 punkte gautų skaidinių visus dauginamuosius; jeigu tam tikras dauginamasis yra keliuose skaidiniuose, jį reikia imti su didžiausiu laipsnio rodikliu;
- 3) rasti kiekvienos trupmenos papildomąjį daugiklį (dalijant bendrąjį vardiklį iš tos trupmenos vardiklio);
- 4) padauginti kiekvienos trupmenos skaitiklį ir vardiklį iš papildomojo daugiklio.

P a v y z d y s. Subendravardiklinkime trupmenas

$$\frac{a}{12a^2-12b^2}; \quad \frac{b}{18a^3+18a^2b}; \quad \frac{a+b}{24a^2-24ab}.$$

S p r e n d i m a s. Išskaidykime vardiklius:

$$12a^2-12b^2=12(a-b)(a+b);$$

$$18a^3+18a^2b=18a^2(a+b);$$

$$24a^2-24ab=24a(a-b).$$

Į bendrąjį vardiklį reikia įtraukti dauginamuosius $(a-b)$, $(a+b)$, a^2 ir skaičių 12, 18, 24 mažiausiąjį bendrąjį kartotinį, t. y. $K(12, 18, 24)=72$. Vadinasi, bendrasis vardiklis yra $72a^2(a-b)(a+b)$.

Papildomieji daugikliai: pirmos trupmenos $6a^2$, antros $4(a-b)$, trečios $3a(a+b)$. Vadinasi,

$$\frac{\frac{6a^2}{a}}{12a^2-12b^2} = \frac{6a^2}{72a^2(a-b)(a+b)};$$



$$\frac{b \overbrace{4(a-b)}^{\quad}}{18a^3 + 18a^2b} = \frac{4b(a-b)}{72a^2(a-b)(a+b)};$$

$$\frac{a+b \overbrace{3a(a+b)}^{\quad}}{24a^2 - 24ab} = \frac{3a(a+b)^2}{72a^2(a-b)(a+b)}.$$

55. Racionaliųjų trupmenų sudėtis ir atimtis. Dviejų (ir apskritai bet kurio baigtinio skaičiaus) racionaliųjų trupmenų su vienodais vardikliais *suma* tapačiai lygi trupmenai su tuo pačiu vardikliu ir su skaitikliu, lygiu sudedamų trupmenų skaitiklių sumai:

$$\frac{P_1}{Q} + \frac{P_2}{Q} = \frac{P_1 + P_2}{Q}.$$

Analogiškai yra atimant trupmenas su vienodais vardikliais:

$$\frac{P_1}{Q} - \frac{P_2}{Q} = \frac{P_1 - P_2}{Q}.$$

1 pavyzdys. Suprastinkime reiškinį $\frac{x^3}{x+y} + \frac{y^3}{x+y}$.

Sprendimas.

$$\frac{x^3}{x+y} + \frac{y^3}{x+y} = \frac{x^3 + y^3}{x+y} = \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{x+y} = x^2 - xy + y^2.$$

Norint sudėti ir atimti racionaliąsias trupmenas su skirtingais vardikliais, trupmenas iš pradžių reikia subendravardiklinti, o po to atlikti veiksmus su bendravardiklėmis trupmenomis.

2 pavyzdys. Suprastinkime reiškinį $\frac{3}{2x^2+2x} + \frac{2x-1}{x^2-1} - \frac{2}{x}$.

Sprendimas. Kadangi $2x^2+2x=2x(x+1)$; $x^2-1=(x-1)(x+1)$, tai

$$\begin{aligned} \frac{3}{2x^2+2x} + \frac{2x-1}{x^2-1} - \frac{2}{x} &= \frac{3 \overbrace{(x-1)}^{\quad}}{2x(x+1)} + \frac{2x-1 \overbrace{(x+1)}^{\quad}}{(x-1)(x+1)} - \frac{2 \overbrace{(x-1)(x+1)}^{2(x-1)(x+1)}}{x} = \\ &= \frac{3(x-1) + 2x(2x-1) - 4(x-1)(x+1)}{2x(x-1)(x+1)} = \frac{x+1}{2x(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2x(x-1)}; \end{aligned}$$

56. Racionaliųjų trupmenų daugyba ir dalyba. Dviejų (ir apskritai bet kurio baigtinio skaičiaus) trupmenų *sandauga* tapačiai lygi trupmenai, kurios skaitiklis yra lygus dauginamųjų trupmenų skaitiklių sandaugai, o vardiklis — vardiklių sandaugai:

$$\frac{P_1}{Q_1} \cdot \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 \cdot P_2}{Q_1 \cdot Q_2}.$$



Dviejų racionaliųjų trupmenų *dalmuo* tapačiai lygus trupmenai, kurios skaitiklis lygus pirmos trupmenos skaitiklio ir antros trupmenos vardiklio sandaugai, o vardiklis — pirmos trupmenos vardiklio ir antros trupmenos skaitiklio sandaugai:

$$\frac{P_1}{Q_1} \cdot \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 \cdot P_2}{Q_1 \cdot Q_2}.$$

Suformuluotos daugybos ir dalybos taisyklės tinka ir tada, kai dauginama ar dalijama iš daugianario: užtenka tą daugianarį parašyti kaip trupmeną, kurios vardiklis yra 1.

Trupmenas, gautas dauginant ar dalijant racionaliąsias trupmenas, kartais galima suprastinti, todėl stengiamasi iš anksto išskaidyti pradinių trupmenų skaitiklius ir vardiklius.

1 pavyzdys. Sudauginkime: $\frac{x^2+2x+1}{18x^3} \cdot \frac{9x^4}{x^3-1}$.

Sprendimas. Skaidome:

$$\frac{x^2+2x+1}{18x^3} = \frac{(x+1)^2}{18x^3}; \quad \frac{9x^4}{x^3-1} = \frac{9x^4}{(x-1)(x+1)}.$$

Taikome trupmenų daugybos taisyklę:

$$\frac{x^2+2x+1}{18x^3} \cdot \frac{9x^4}{x^3-1} = \frac{(x+1)^2 \cdot 9x^4}{18x^3(x+1)(x-1)} = \frac{x(x+1)}{2(x-1)}.$$

2 pavyzdys. Padalykime: $\frac{a^3-2a^2}{3a+3} : \frac{a^3-4}{3a^2+6a+3}$.

Sprendimas. Skaidome: $\frac{a^3-2a^2}{3a+3} = \frac{a^2(a-2)}{3(a+1)}$;

$$\frac{a^3-4}{3a^2+6a+3} = \frac{(a-2)(a+2)}{3(a+1)^2}.$$

Taikome dalybos taisyklę:

$$\frac{a^3-2a^2}{3a+3} : \frac{a^3-4}{3a^2+6a+3} = \frac{a^2(a-2) \cdot 3(a+1)^2}{3(a+1)(a-2)(a+2)} = \frac{a^2(a+1)}{a+2}.$$

57. Racionaliosios trupmenos kėlimas sveikuoju laipsniu. Norint racionaliąją trupmeną $\frac{P}{Q}$ pakelti natūraliuoju laipsniu n , reikia tuo laipsniu atskirai pakelti skaitiklį ir vardiklį:

$$\left(\frac{P}{Q}\right)^n = \frac{P^n}{Q^n}.$$

1 pavyzdys. Paverskime trupmeną laipsnį $\left(\frac{2x^2y^3}{3z^5}\right)^3$.

Sprendimas. $\left(\frac{2x^2y^3}{3z^5}\right)^3 = \frac{(2x^2y^3)^3}{(3z^5)^3} = \frac{8x^6y^9}{27z^{15}}.$

Keliant trupmeną sveikuoju neigiamuoju laipsniu taikoma taisyklė $\left(\frac{P}{Q}\right)^{-n} = \left(\frac{Q}{P}\right)^n$, kuri yra teisinga su visomis tomis kintamųjų reikšmėmis, kai $P \neq 0$ ir $Q \neq 0$.



2 p a v y z d y s. Paverskime trupmena reiškiniį

$$\left(\frac{(a+b)^2 (a-b)^3}{(a+2b)^4} \right)^{-5}.$$

S p r e n d i m a s.

$$\left(\frac{(a+b)^2 (a-b)^3}{(a+2b)^4} \right)^{-5} = \left(\frac{(a+2b)^4}{(a+b)^2 (a-b)^3} \right)^5 = \frac{(a+2b)^{20}}{(a+b)^{10} (a-b)^{15}}.$$

58. Racionaliųjų reiškinių pertvarkymas. Pertvarkant bet kurį racionalųjį reiškinį užtenka mokėti sudėti, atimti, dauginti ir dalyti racionaliąsias trupmenas, taip pat kelti trupmeną sveikuoju laipsniu. Kiekvieną racionalųjį reiškinį galima paversti trupmena, kurios skaitiklis ir vardiklis — sveikieji racionalieji reiškiniai; dažniausiai toks ir yra racionaliųjų reiškinių pertvarkymo tikslas.

P a v y z d y s. Suprastinkime reiškinį

$$\left(\frac{2a}{2a+b} - \frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2} \right) \cdot \left(\frac{2a}{4a^2-b^2} + \frac{1}{b-2a} \right)^{-1} + \frac{8a^2}{2a+b}.$$

S p r e n d i m a s.

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{2a}{2a+b} - \frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2} &= \frac{2a}{2a+b} - \frac{4a^2}{(2a+b)^2} = \\ &= \frac{2a(2a+b) - 4a^2}{(2a+b)^2} = \frac{2ab}{(2a+b)^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \frac{2a}{4a^2-b^2} + \frac{1}{b-2a} &= \frac{2a}{(2a-b)(2a+b)} - \frac{1}{2a-b} = \\ &= \frac{2a-2a-b}{(2a-b)(2a+b)} = \frac{-b}{(2a-b)(2a+b)}; \end{aligned}$$

$$3) \quad \left(-\frac{b}{(2a-b)(2a+b)} \right)^{-1} = -\frac{(2a-b)(2a+b)}{b};$$

$$\begin{aligned} 4) \quad \frac{2ab}{(2a+b)^2} \cdot \left(-\frac{(2a-b)(2a+b)}{b} \right) &= -\frac{2ab(2a-b)(2a+b)}{b(2a+b)^2} = \\ &= -\frac{2a(2a-b)}{2a+b} = \frac{2ab-4a^2}{2a+b}; \end{aligned}$$

$$5) \quad \frac{2ab-4a^2}{2a+b} + \frac{8a^2}{2a+b} = \frac{2ab+4a^2}{2a+b} = \frac{2a(2a+b)}{2a+b} = 2a.$$

§ 7. Iracionalieji reiškiniai

59. Paprasčiausieji aritmetinių šaknų (radikalų) pertvarkymai. Pertvarkydami aritmetines šaknis, taikome jų savybes (žr. 35 skyrelį).



Išnagrinėsime keletą pavyzdžių, kaip aritmetinių šaknų savybės taikomos pertvarkant radikalus. Čia laikysime, kad visi kintamieji įgyja tik neneigiamąsias reikšmes.

1 pavyzdys. Ištraukime šaknį iš sandaugos: $\sqrt[3]{a^3 b^9}$.
Sprendimas. Taikome 1^o savybę:

$$\sqrt[3]{a^3 b^9} = \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^9} = ab^3.$$

2 pavyzdys. Iškelkime dauginamuosius prieš šaknies ženklą: $\sqrt{45a^5}$.

Sprendimas. $\sqrt{45a^5} = \sqrt{9a^4 5a} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{a^4} \cdot \sqrt{5a} = 3a^2 \sqrt{5a}$.

Tokį pertvarkymą vadiname *dauginamojo iškėlimu prieš šaknies ženklą*. Taip pertvarkant supaprastėja pošaknio reiškinys.

3 pavyzdys. Suprastinkime $(\sqrt{a^2})^5$.

Sprendimas. Remiantis 3^o savybe, $(\sqrt{a^2})^5 = \sqrt[3]{(a^2)^5} = \sqrt[3]{a^{10}}$.
Iškeliame dauginamuosius prieš šaknies ženklą:

$$\sqrt[3]{a^{10}} = \sqrt[3]{a^9 \cdot a} = \sqrt[3]{a^9} \cdot \sqrt[3]{a} = a^3 \sqrt[3]{a}.$$

Taigi $(\sqrt{a^2})^5 = a^3 \sqrt[3]{a}$.

4 pavyzdys. Suprastinkime $\sqrt[4]{x^2 \sqrt[3]{x}}$.

Sprendimas. Reiškinį $x^2 \sqrt[3]{x}$ pertvarkykime, įkėlę dauginamąjį po šaknies ženklą:

$$x^2 \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{(x^2)^3} \cdot \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x^6} \cdot \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x^6 x} = \sqrt[3]{x^7}.$$

Remiantis 4^o savybe, $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^7}} = \sqrt[12]{x^7}$.

5 pavyzdys. Suprastinkime reiškinį $\sqrt[30]{2^9}$.

Sprendimas. Remdamiesi 5^o savybe, galime šaknies rodiklį ir pošaknio reiškinių laipsnio rodiklį padalyti iš to paties natūraliojo skaičiaus. Dalijame tuos rodiklius iš 3:

$$\sqrt[30]{2^9} = \sqrt[10]{2^3} = \sqrt[3]{8}.$$

6 pavyzdys. Suprastinkime reiškinius:

a) $\sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[5]{a^2}$; b) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a}$; c) $\sqrt[8]{x^3} \cdot \sqrt[12]{x^7}$.



Sprendimas. a) Pagal 1^o savybę, norint sudauginti to paties laipsnio šaknis, užtenka padauginti pošaknio reiškinius ir iš gauto rezultato ištraukti to paties laipsnio šaknį. Vadinas,

$$\sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[5]{a^2} = \sqrt[5]{a \cdot a^2} = \sqrt[5]{a^3}.$$

b) Iš pradžių suvienodinkime visų radikalų rodiklį. Remdamiesi 5^o savybe, šaknies rodiklį ir pošaknio reiškinio laipsnio rodiklį galime dauginėti iš to paties natūraliojo skaičiaus. Todėl

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^2}, \text{ ir } \sqrt[6]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a} = \sqrt[6]{a^3}. \text{ Dabar šaknies rodiklį ir pošaknio reiškinio rodiklį dalijame iš 3: } \sqrt[6]{a^3} = \sqrt{a}.$$

$$\text{Taigi } \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a} = \sqrt{a}.$$

c) Suvienodinkime radikalų rodiklius. Tam randame skaičių 8 ir 12 mažiausiąjį bendrąjį kartotinį, t. y. $K(8, 12) = 24$. Vadinas, pirmos šaknies rodiklį ir pošaknio reiškinio laipsnio rodiklį reikia dauginėti iš 3, o antros — atitinkamai iš 2. Tada

$$\sqrt[8]{x^3} \cdot \sqrt[12]{x^7} = \sqrt[24]{x^9} \cdot \sqrt[24]{x^{14}} = \sqrt[24]{x^9 \cdot x^{14}} = \sqrt[24]{x^{23}}.$$

Praktiškai, atliekant veiksmus su radikalais, dažnai pereinama prie trupmeninių rodiklių. Pavyzdžiui,

$$\sqrt[8]{x^3} \cdot \sqrt[12]{x^7} = x^{\frac{3}{8}} \cdot x^{\frac{7}{12}} = x^{\frac{3}{8} + \frac{7}{12}} = x^{\frac{23}{24}} = \sqrt[24]{x^{23}}.$$

60. Tapatybė $\sqrt{a^2} = |a|$. Suprastinkime reiškinį $\sqrt{a^2}$. Čia galimi du atvejai: $a \geq 0$ arba $a < 0$. Kai $a \geq 0$, tai $\sqrt{a^2} = a$; pavyzdžiui, $\sqrt{2^2} = 2$, $\sqrt{27^2} = 27$, $\sqrt{0^2} = 0$. Kai $a < 0$, tai $\sqrt{a^2} = -a$; pavyzdžiui, $\sqrt{(-2)^2} = -(-2) = 2$. Taigi

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, & \text{kai } a \geq 0, \\ -a, & \text{kai } a < 0. \end{cases}$$

Bet lygiai taip pat apibrėžiamas realiojo skaičiaus modulis (žr. 26 skyrelį). Todėl

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Pavyzdžiui, $\sqrt{3^2} = |3| = 3$; $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = -(-5) = 5$. Apskritai, kai n — lyginis skaičius, t. y. $n = 2k$, tai

$$\sqrt[n]{a^{2k}} = |a|.$$

P a v y z d y s. Suprastinkime reiškinį $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{2 - x} + x - 3$.



Sprendimas. $\sqrt{x^2-6x+9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$. Kadangi reiškinyje yra dėmuo $\sqrt{2-x}$, tai $2-x \geq 0$, ir $x \leq 2$. Vadinasi, $x-3 < 0$, todėl $|x-3| = -(x-3) = 3-x$. Taigi $\sqrt{x^2-6x+9} = 3-x$, ir

$$\sqrt{x^2-6x+9} + \sqrt{2-x} + x-3 = 3-x + \sqrt{2-x} + x-3 = \sqrt{2-x}.$$

61. Iracionaliųjų reiškinių pertvarkymas. Pertvarkydami iracionaliuosius reiškinius, remsimės radikalų savybėmis (žr. 35 skyrelį) ir laipsnio su racionaliuoju rodikliu savybėmis (žr. 38 skyrelį).

Pavyzdys. Suprastinkime reiškinį

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt[4]{x^3 - \sqrt{x}}}{1 - \sqrt{x}} + \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} \right)^2 \left(x^0 + \frac{2}{\sqrt{x}} + x^{-1} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Sprendimas.

$$1) \frac{\sqrt[4]{x^3 - \sqrt{x}}}{1 - \sqrt{x}} = \frac{\sqrt[4]{x} \sqrt[4]{x^2 - 1}}{1 - \sqrt{x}} = \frac{\sqrt[4]{x} (\sqrt{x} - 1)}{1 - \sqrt{x}} = -\sqrt[4]{x}.$$

$$2) -\sqrt[4]{x} + \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} = \frac{-\sqrt[4]{x} \sqrt[4]{x} + 1 + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} = \frac{-\sqrt{x} + 1 + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}.$$

$$3) \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right)^2 = \frac{1^2}{(\sqrt[4]{x})^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$4) x^0 + \frac{2}{\sqrt{x}} + x^{-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} = \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x} = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x}.$$

$$5) \left(\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x} \right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{x}{(\sqrt{x}+1)^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{x}{(\sqrt{x}+1)^2}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}.$$

$$6) \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}.$$

$$\text{Taigi } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+1}.$$

Paprastai stengiamės parašyti atsakymą tokį, kad vardiklyje nebūtų iracionaliųjų. Kad panaikintume iracionalybę trupmenos $\frac{1}{\sqrt{x}+1}$ vardiklyje, tiek skaitiklį, tiek vardiklį dauginame iš $\sqrt{x}-1$ (šis reiškinys vadinamas *jungtiniu* reiškiniui $\sqrt{x}+1$). Tada

$$\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x})^2-1^2} = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}.$$



III SKYRIUS. FUNKCIJOS IR GRAFIKAI

§ 8. Funkcijų savybės

62. Funkcijos apibrėžimas. Kintamojo y priklausomybę nuo x vadiname *funkcija*, kai kiekvieną x reikšmę atitinka vienintelė y reikšmė. Kintamąjį x vadiname *nepriklausomuoju kintamuoju*, arba *argumentu*, o kintamąjį y — *priklausomuoju kintamuoju*. Kintamojo y reikšmę, atitinkančią kintamojo x reikšmę, vadiname *funkcijos reikšme*.

Kai kintamasis y yra kintamojo x funkcija, rašome $y=f(x)$ (skaitome: „Ef iks“). Raidė f žymi nagrinėjamą funkciją, t. y. funkcinę priklausomybę tarp kintamųjų x ir y ; $f(x)$ yra funkcijos reikšmė, atitinkanti argumento reikšmę x . Taip pat sakoma, kad $f(x)$ yra funkcijos *reikšmė taške x* .

Visos reikšmės, kurias įgyja nepriklausomasis kintamasis, sudaro *funkcijos apibrėžimo sritį*.

Visos reikšmės, kurias įgyja funkcija $f(x)$ (kai x priklauso jos apibrėžimo sričiai), sudaro *funkcijos reikšmių sritį*.

Nagrinėkime funkciją $y=x^2$, kai $1 \leq x \leq 3$. Šis užrašas reiškia, kad apibrėžta tokia funkcija: kiekvieną intervalo $[1; 3]$ skaičių x atitinka to skaičiaus kvadratas. Pavyzdžiui, $f(1)=1^2=1$, $f(2)=2^2=4$, $f(2,3)=2,3^2=5,29$ ir t. t. Užrašas $f(4)$ šiuo atveju neturi prasmės, nes skaičius 4 nepriklauso intervalui $[1; 3]$. Intervalas $[1; 3]$ — funkcijos apibrėžimo sritis.

63. Analizinis funkcijos apibrėžimas. Norint apibrėžti funkciją, reikia nurodyti būdą, kaip rasti kiekvieną argumento reikšmę atitinkančią funkcijos reikšmę. Dažniausiai funkciją apibrėžiamo formule $y=f(x)$; čia $f(x)$ — tam tikras reiškiny su kintamuoju x . Tada sakome, kad funkcija apibrėžta formule arba kad funkcija apibrėžta *analiziškai*.

1 p a v y z d y s. $y=x^2+5x-1$, kai $x \geq 0$. Šios funkcijos apibrėžimo sritis — spindulys $[0; +\infty)$. Norint rasti funkcijos reikšmę taške x ($x \geq 0$), užtenka rasti reiškinio x^2+5x-1 skaitinę reikšmę tame taške. Funkcija apibrėžta analiziškai.

Kai funkcija apibrėžta analiziškai, kartais nenurodoma funkcijos apibrėžimo sritis. Tada turima galvoje, kad funkcijos $y=f(x)$ apibrėžimo sritis sutampa su reiškinio $f(x)$ apibrėžimo sritimi, t. y. su aibe tų x reikšmių, su kuriomis reiškinys $f(x)$ turi prasmę.

2 p a v y z d y s. Funkcija $y=f(x)$ analiziškai apibrėžta formule $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^4+3}$. Raskime:

- a) $f(-x)$; b) $f(kx)$; c) $f(x+a)$; d) $f(|x|)$.



Sprendimas. a) Norint rasti $f(-x)$, reikia funkcijoje $f(x)$ vietoj x parašyti $-x$. Gauname:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + (-x) + 1}{(-x)^4 + 3} = \frac{x^2 - x + 1}{x^4 + 3}.$$

Taigi

$$f(-x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^4 + 3}.$$

$$b) f(kx) = \frac{(kx)^2 + (kx) + 1}{(kx)^4 + 3} = \frac{k^2 x^2 + kx + 1}{k^4 x^4 + 3},$$

$$c) f(x+a) = \frac{(x+a)^2 + (x+a) + 1}{(x+a)^4 + 3}.$$

$$d) f(|x|) = \frac{|x|^2 + |x| + 1}{|x|^4 + 3} = \frac{x^2 + |x| + 1}{x^4 + 3}.$$

3 pavyzdys. Nustatykite funkcijos $y = \frac{1}{x+2}$ apibrėžimo sritį.

Sprendimas. Reiškinyje $\frac{1}{x+2}$ apibrėžtas su visais x , išskyrus tą reikšmę, su kuria vardiklis virsta 0, — tai reikšmė $x = -2$. Vadinasi, funkcijos apibrėžimo sritį sudaro visi skaičiai, išskyrus $x = -2$.

4 pavyzdys. Nustatykite funkcijos $y = \sqrt{x-1}$ apibrėžimo sritį.

Sprendimas. Reiškinyje $\sqrt{x-1}$ apibrėžtas su tais x , su kuriais $x-1 \geq 0$, t. y. kai $x \geq 1$. Vadinasi, funkcijos apibrėžimo sritis — spindulys $[1; +\infty)$.

Kartais funkcija skirtinguose intervaluose apibrėžiama skirtingomis formulėmis, pavyzdžiui:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{kai } -1 \leq x \leq 0, \\ x+2, & \text{kai } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Si funkcija apibrėžta intervale $[-1; 1]$. Apskaičiuojant funkcijos reikšmes, reikia nustatyti, kuria formule naudotis, kai duota konkreti argumento reikšmė. Pavyzdžiui, $f(0,5)$ apskaičiuojame iš lygybės $f(x) = x+2$. Gauname $f(0,5) = 2,5$. Kai reikia apskaičiuoti $f(-0,5)$, imame lygybę $f(x) = 2x+3$. Iš jos gauname $f(-0,5) = 2$.

64. Funkcijos apibrėžimas lentelė. Praktiškai funkciją dažnai apibrėžiame *lentele*: pateikiama lentelė, kurioje nurodomos funkcijos reikšmės, atitinkančios lentelėje esančias argumento reikšmes. Kvadratų, kubų, kvadratinų šaknų lentelė — tai pavyzdžiai, kai funkcija apibrėžiama lentele.



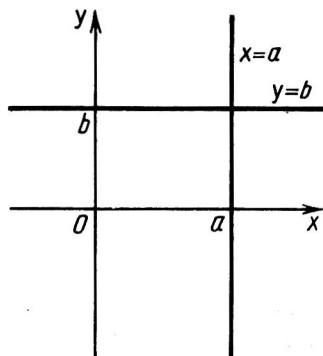
Funkciją apibrėžti lentelė patogiu. Iš jos funkcijos reikšmės, atitinkančios lentelėje esančias argumento reikšmes, randamos be jokių skaičiavimų. Praktikoje dažnai vieno dydžio priklausomybė nuo kito dydžio randame bandymų keliu: vienam dydžiui suteikiame konkrečias reikšmes, o paskui bandymu randame antro dydžio reikšmes (paprastai — apytiksles), atitinkančias kiekvieną pirmojo dydžio reikšmę. Taip remiantis bandymais sudaroma funkcijos reikšmių lentelė. Beje, yra metodų, padedančių remiantis tokia lentelė parinkti formulę, apibrėžiančią funkciją (tam tikru tikslumu).

65. Skaičių plokštuma. Koordinačių plokštuma, koordinačių ašys. Realiųjų skaičių visų porų¹ aibę vadiname *skaičių plokštuma*.

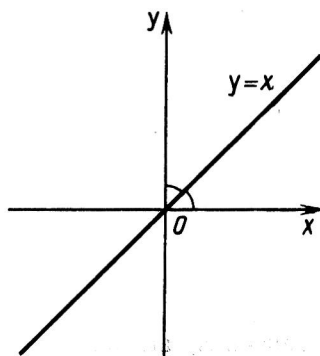
Visų realiųjų skaičių aibės (arba skaičių tiesės) geometrinis modelis yra koordinačių tiesė (18, 21 skyreliai). Galima nurodyti ir realiųjų skaičių visų porų aibės (skaičių plokštumos) geometrinį modelį — tai koordinačių plokštuma. *Koordinačių plokštuma* xy apibrėžiama dviem viena kitai statmenomis koordinačių tiesėmis, kurios turi bendrą pradžią O ir vienodą mastelį (9 pav.). Tašką O vadiname *koordinačių pradžia*. Horizontaliąją tiesę vadiname *abscisių ašimi*, arba x -ų ašimi, vertikaliąją — *ordinačių ašimi*, arba y -ų ašimi.

Jeigu koordinačių plokštumoje pažymėsime visus taškus, kurių abscisė $x=a$, tai gausime tiesę, lygiagrečią y ašiai (9 pav.); sakome, kad $x=a$ — tos tiesės lygtis. Jeigu koordinačių plokštumoje pažymėsime visus taškus, kurių ordinatė $y=b$, tai gausime tiesę, lygiagrečią x ašiai (9 pav.); sakome, kad $y=b$ — tos tiesės lygtis.

¹ Skaičių pora — tai du skaičiai, paimti konkrečia tvarka.



9 pav.



10 pav.



66. Analiziškai apibrėžtos funkcijos grafikas. Sakysime, kad funkcija analiziškai apibrėžta formule $y=f(x)$. Koordinačių plokštumoje pažymėkime visus taškus, turinčius tokią savybę: taško abscisė priklauso funkcijos apibrėžimo sričiai, o ordinatė lygi atitinkamai funkcijos reikšmei. Taškų $(x; f(x))$ aibę vadiname **funkcijos grafiku**.

Pavyzdžiui, funkcijos $y=x$ grafikas yra aibė taškų $(x; x)$, t. y. aibė taškų, turinčių vienodas koordinates. Ta taškų aibė yra I ir III koordinatinių kampų pusiaukampinė (10 pav.).

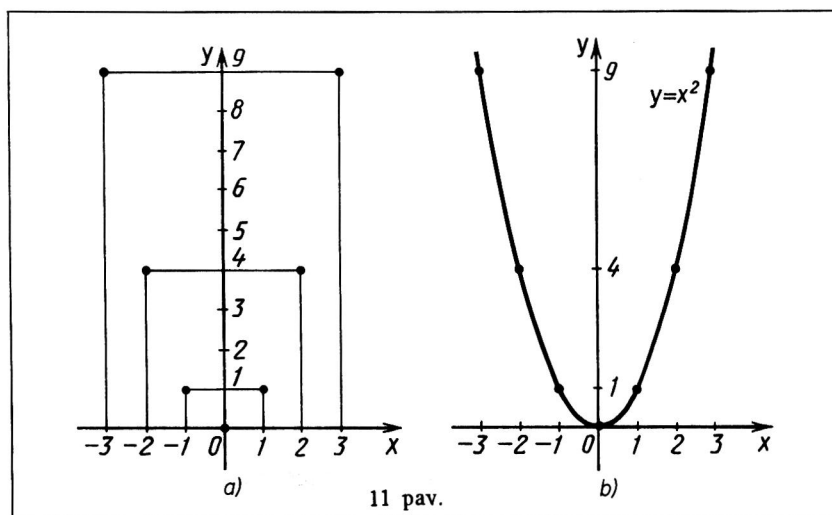
Braizant funkcijos grafiką sudaroma funkcijos reikšmių, atitinkančių tam tikras argumento reikšmes, lentelė, plokštumoje pažymimi atitinkami taškai ir gautieji taškai jungiami linija. Tokiais atvejais laikoma, kad funkcijos grafikas yra glodi kreivė, o rastieji taškai pakankamai tiksliai nusako funkcijos kitimo pobūdį.

P a v y z d y s. Nubraižykime funkcijos $y=x^2$ grafiką.

S p r e n d i m a s. Sudarykime kelių funkcijos reikšmių lentelę:

x	-2,5	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	2,5
y	6,25	4	1	0,25	0	0,25	1	4	6,25

Koordinačių plokštumoje pažymėkime rastiuosius taškus $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(-1; 1)$, $(2; 4)$, $(-2; 4)$, $(2,5; 6,25)$, $(-2,5; 6,25)$ (11a pav.). Sujungę taškus glodžia kreive, gausime funkcijos $y=x^2$





grafiką (tiksliau — grafiko eskizą). Gautą kreivę vadiname *parabole* (11b pav.).

67. Lyginės ir nelyginės funkcijos. Funkciją $y=f(x)$ vadiname *lygine*, kai su kiekvienu x iš funkcijos apibrėžimo srities teisinga lygybė $f(-x)=f(x)$.

Funkciją $y=f(x)$ vadiname *nelygine*, kai su kiekvienu x iš funkcijos apibrėžimo srities teisinga lygybė $f(-x)=-f(x)$.

Jeigu funkcija $y=f(x)$ yra tokia, kad su bent viena reikšmių x ir $-x$ pora $f(-x) \neq f(x)$, ir bent su viena reikšmių x ir $-x$ pora $f(-x) \neq -f(x)$, tai funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė.

Iš apibrėžimo aišku, kad tiek lyginės, tiek nelyginės funkcijos apibrėžimo sritis X turi tokią savybę: jeigu $x \in X$, tai ir $-x \in X$ (t. y. X — taško O atžvilgiu simetrinė aibė).

P a v y z d y s. Nustatykite, kurios iš šių funkcijų yra lyginės ar nelyginės:

$$\text{a) } y=x^2; \quad \text{b) } y=x^3; \quad \text{c) } y=\frac{x-4}{x^2-9}.$$

S p r e n d i m a s. a) $f(x)=x^2$, $f(-x)=(-x)^2=x^2$. Vadinasi, $f(-x)=f(x)$ su visais x . Funkcija lyginė.

b) $f(x)=x^3$, $f(-x)=(-x)^3=-x^3$. Vadinasi, $f(-x)=-f(x)$ su visais x . Funkcija nelyginė.

$$\text{c) } f(x)=\frac{x-4}{x^2-9}, \quad f(-x)=\frac{-x-4}{(-x)^2-9}=-\frac{x+4}{x^2-9}. \quad \text{Kadangi}$$

$f(-x) \neq f(x)$ ir $f(-x) \neq -f(x)$, tai funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė.

68. Lyginės funkcijos grafikas. Nelyginės funkcijos grafikas. Lyginės ir nelyginės funkcijų grafikai pasižymi tokiomis ypatybėmis:

Lyginės funkcijos grafikas simetriškas ordinačių ašies atžvilgiu.

Nelyginės funkcijos grafikas simetriškas koordinačių pradžios atžvilgiu.

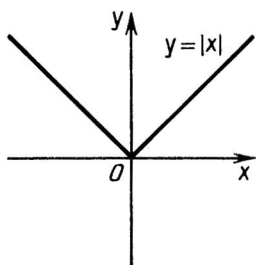
1 p a v y z d y s. Nubraižykime funkcijos $y=|x|$ grafiką.

S p r e n d i m a s. $f(-x)=|-x|=|x|=f(x)$. Vadinasi, funkcija lyginė, todėl jos grafikas simetriškas ordinačių ašies atžvilgiu.

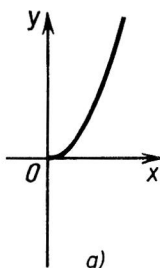
Kai $x \geq 0$, tai $|x|=x$, t. y. kai $x \geq 0$, tai $y=x$. Funkcijos $y=x$, kai $x \geq 0$, grafikas yra pirmojo koordinačio kampo pusiauakampinė. Atlikę jos simetriją y ašies atžvilgiu, gauname funkcijos $y=|x|$ grafiką (12 pav.).

2 p a v y z d y s. Nubraižykime funkcijos $y=x|x|$ grafiką.

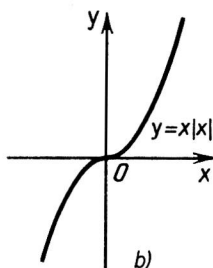
S p r e n d i m a s. $f(-x)=(-x)|-x|=-x|x|=-f(x)$. Vadinasi, funkcija nelyginė, todėl jos grafikas simetriškas koordinačių pradžios atžvilgiu.



12 pav.



a)



b)

13 pav.

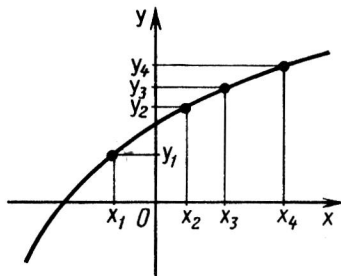
Kai $x \geq 0$, tai $|x| = x$, ir $f(x) = x \cdot |x| = x \cdot x = x^2$. Vadinasi, $y = x^2$, kai $x \geq 0$. Grafikas yra parabolės šaka, pavaizduota 13a paveiksle. Atlikę jos simetriją koordinačių pradžios atžvilgiu, gauname funkcijos $y = x|x|$ grafiką (13b pav.).

69. Didėjančios ir mažėjančios funkcijos. Sakome, kad funkcija $y = f(x)$ *didėja* intervale X , kai su bet kuriais x_1 ir x_2 iš X , $x_1 < x_2$, teisinga nelygybė $f(x_1) < f(x_2)$. Sakome, kad funkcija *mažėja* intervale X , kai su bet kuriais x_1 ir x_2 iš X , $x_1 < x_2$, teisinga nelygybė $f(x_1) > f(x_2)$. Kitaip tariant, funkcija didėja (mažėja) intervale X , kai didesnę argumento reikšmę atitinka didesnė (mažesnė) funkcijos reikšmė (14, 15 pav.).

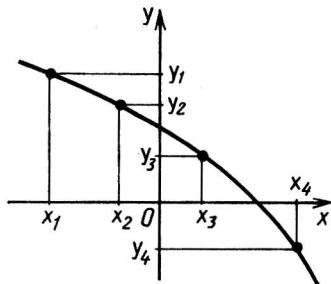
Pavyzdys. Nustatykite didėja ar mažėja funkcija $y = 2x + 3$.

Sprendimas. Imkime bet kuriuos du skaičių tiesės taškus x_1 ir x_2 , $x_1 < x_2$. Remiantis skaitinių nelygybių savybėmis (žr. 24 skyrelį) $2x_1 < 2x_2$, todėl $2x_1 + 3 < 2x_2 + 3$, t. y. $f(x_1) < f(x_2)$.

Tai reiškia, kad funkcija didėja visoje skaičių tiesėje.



14 pav.



15 pav.



§ 9. Funkcijų tipai

70. Pastovioji funkcija. *Pastoviąja* vadiname funkciją, apibrėžtą formule $y=b$; čia b — kuris nors skaičius.

Pastoviosios funkcijos $y=b$ grafikas yra tiesė, lygiagrečiai absčių ašiai ir einanti per ordinačių ašies tašką $(0; b)$. 16 paveiksle pavaizduoti kelių pastoviųjų funkcijų grafikai. Funkcijos $y=0$ grafikas yra absčių ašis.

71. Tiesioginis proporcingumas. *Tiesioginiu proporcingumu* vadiname funkciją, apibrėžtą formule $y=kx$; čia $k \neq 0$. Skaičių k vadiname *proporcingumo koeficientu*.

Išvardysime funkcijos $y=kx$ savybes.

1) Funkcijos apibrėžimo sritis — visų realiųjų skaičių aibė.

2) $y=kx$ — nelyginė funkcija ($f(-x)=k(-x)=-kx=-f(x)$).

3) kai $k>0$, tai funkcija didėja, o kai $k<0$, funkcija mažėja visoje skaičių tiesėje.

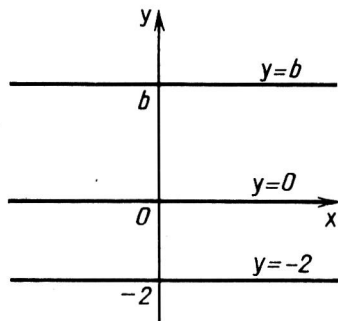
3.1 t. | Tiesioginio proporcingumo $y=kx$ grafikas yra tiesė, einanti per koordinatinių pradžių.

Įrodymas

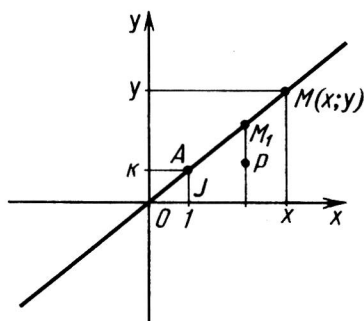
Per koordinatinių pradžių ir tašką $A(1; k)$ nubrėžkime tiesę l . Įrodysime, kad ji ir yra funkcijos $y=kx$ grafikas.

Iš pradžių nagrinėkime atvejį, kai $k>0$ (17 pav.).

Imkime bet kurį tiesės l tašką $M(x; y)$. Kadangi trikampiai OAJ ir OMx panašūs, tai $\frac{Mx}{AJ} = \frac{Ox}{OJ}$, $\frac{y}{k} = \frac{x}{1}$, todėl $y=kx$. Dabar imkime tašką $P(x; y)$, kuris nėra tiesėje l . Nagrinėkime tašką M_1 , kuris turi tą pačią abscisę x ir yra tiesėje l . Jo koordinatės tenkina lygtį $y=kx$, todėl taško P koordinatės tos



16 pav.



17 pav.



lygties netenkina. Vadinasi, tiesės l taškai ir tik jie tenkina lygtį $y=kx$, taigi tiesė l — funkcijos $y=kx$ grafikas.

Dabar išnagrinėkime atvejį, kai $k < 0$. Imkime dvi funkcijas $y=kx$ ir $y=-kx$. Kai abscisė x ta pati, tų funkcijų grafikų ordinatų moduliai lygūs, bet ženklai priešingi. Todėl šių funkcijų grafikai simetriški abscisių ašies atžvilgiu. Bet $-k > 0$, todėl, kaip jau įrodyta, funkcijos $y=-kx$ grafikas yra tiesė. Kadangi simetrija tiesę perveda į tiesę, tai ir funkcijos $y=kx$ grafikas yra tiesė.

18 paveiksle pavaizduotas funkcijos $y=kx$ grafikas, kai $k > 0$, o 19 paveiksle — funkcijos $y=kx$ grafikas, kai $k < 0$.

P a v y z d y s. Nubraižykime funkcijos $y=2x$ grafiką.

S p r e n d i m a s. Žinome, kad grafikas yra tiesė, einanti per koordinačių pradžią. Jai nubrėžti užtenka rasti dar vieną grafiko tašką. Galima imti tašką $(1; 2)$ (kai $x=1$, tai $y=2 \cdot 1=2$). Funkcijos $y=2x$ grafikas pavaizduotas 20 paveiksle.

72. Tiesinė funkcija. Tiesinė funkcija vadiname funkciją, kurią galima apibrėžti formule $y=kx+b$; čia k ir b — realieji skaičiai. Skyrium imant, kai $k=0$, tai turime pastoviąją funkciją $y=b$; kai $b=0$, gauname tiesioginį proporcingumą $y=kx$.

Išvardysime tiesinės funkcijos $y=kx+b$, $k \neq 0$, $b \neq 0$, savybes.

- 1) Funkcijos apibrėžimo sritis — visų realiųjų skaičių aibė.
- 2) Funkcija $y=kx+b$ nėra nei lyginė, nei nelyginė.
- 3) Kai $k > 0$, tai funkcija didėja, kai $k < 0$, mažėja visoje skaičių tiesėje.

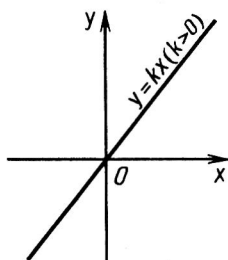
3.2 t. | Tiesinės funkcijos $y=kx+b$ grafikas yra tiesė.

I r o d y m a s

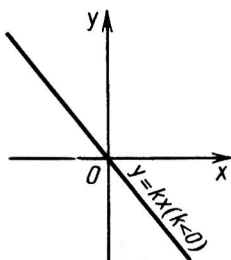
Kai $k=0$, gauname pastoviąją funkciją $y=b$; jos grafikas yra tiesė, lygiagreti x ašiai (žr. 70 skyrelį).

Kai $b=0$, gauname tiesioginį proporcingumą $y=kx$; jo grafikas, remiantis 3.1 teorema, yra tiesė, einanti per koordinačių pradžią (žr. 71 skyrelį).

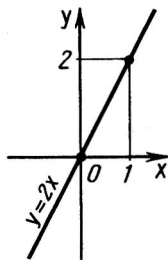
Sakykime, $k \neq 0$ ir $b \neq 0$. Jeigu taškas $(x_1; y_1)$ priklauso funkcijos $y=kx$ grafikui (t. y. teisinga lygybė $y_1=kx_1$), tai taškas $(x_1; y_1+b)$ priklauso funkcijos



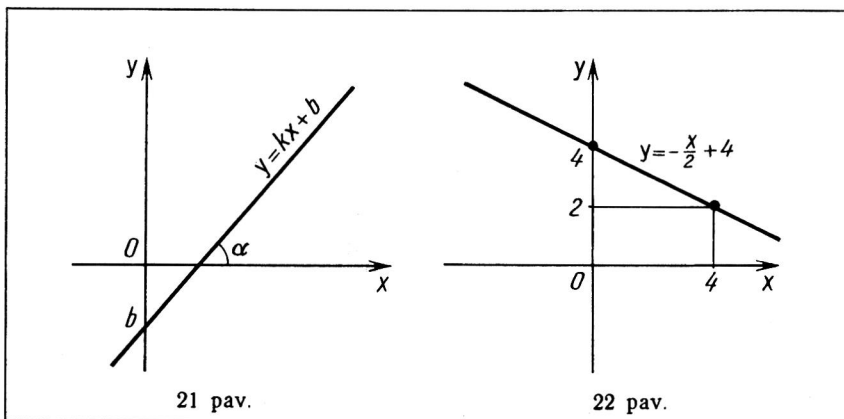
18 pav.



19 pav.



20 pav.



$y=kx+b$ grafikui (t. y. teisinga lygybė $y_1+b=kx_1+b$). Bet tokia figūros F transformacija, kuri kiekvieną jos tašką $(x_1; y_1)$ perveda į tašką (x_1, y_1+b) , yra lygiagretusis postūmis (žr. 95 skyrelį), o lygiagretusis postūmis tiesę perveda į lygiagrečią jai tiesę.

Taigi funkcijos $y=kx+b$ grafikas yra tiesė, lygiagreti tiesioginio proporcingumo $y=kx$ grafikui.

21 paveiksle pavaizduotas funkcijos $y=kx+b$ grafikas. Tai tiesė, lygiagreti tiesei — funkcijos $y=kx$ grafikui — ir einanti per ordinatų ašies tašką $(0; b)$.

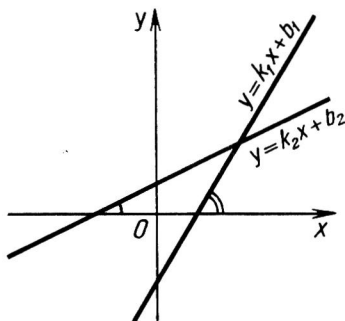
Skaičių k vadiname *tiesės krypties koeficientu*; jis lygus tangentui kampo α , kurį sudaro tiesė su teigiamuoju x ašies spinduliu, t. y. $k=\operatorname{tg} \alpha$.

P a v y z d y s. Nubraižykime funkcijos $y=-\frac{x}{2}+4$ grafiką.

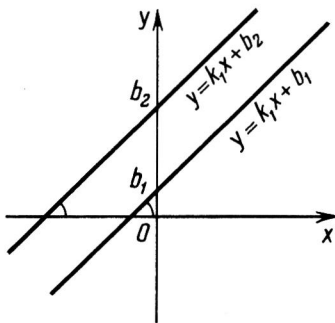
S p r e n d i m a s. Tiesinės funkcijos grafikas yra tiesė, todėl brėžiant užtenka žinoti du grafiko taškus. Sudarome lentelę:

x	0	4
y	4	2

(argumentui x suteikėme reikšmes 0 ir 4 ir pagal formulę $y=-\frac{x}{2}+4$ radome atitinkamas y reikšmes). Koordinačių plokštumoje pažymėkime taškus $(0; 4)$ ir $(4; 2)$, o per šiuos taškus brėžkime tiesę. Gautoji tiesė yra funkcijos $y=-\frac{x}{2}+4$ grafikas (22 pav.).



23 pav.



24 pav.

73. Tiesinių funkcijų grafikų tarpusavio padėtis. Nagrinėkime dvi tiesines funkcijas $y = k_1x + b_1$ ir $y = k_2x + b_2$. Jų grafikai yra tiesės (žr. 72 skyrelį). Tos tiesės *kertasi*, kai $k_1 \neq k_2$ (23 pav.). Tiesės *lygiagrečios*, kai $k_1 = k_2$. Paskutinį atvejį savo ruožtu galima suskaidyti į du: kai $k_1 = k_2$ ir $b_1 = b_2$, tai tiesės *sutampa*; kai $k_1 = k_2$ ir $b_1 \neq b_2$, tai tiesės *lygiagrečios ir nesutampa* (24 pav.).

74. Atvirkštinis proporcingumas. *Atvirkštinis proporcingumas* vadiname funkciją, apibrėžtą formule $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$. Skaičių k vadiname *atvirkštinio proporcingumo koeficientu*.

Išvardysime funkcijos $y = \frac{k}{x}$ savybes.

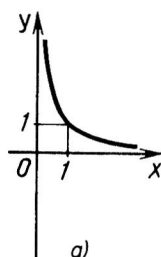
1) Apibrėžimo sritis — visų, išskyrus nulį, realiųjų skaičių aibė.

2) $y = \frac{k}{x}$ — nelyginė funkcija (nes $f(-x) = \frac{k}{-x} = -\frac{k}{x} = -f(x)$).

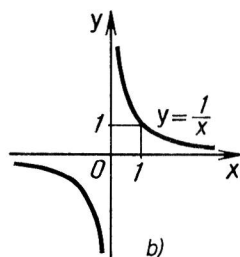
3) Kai $k > 0$, tai funkcija $y = \frac{k}{x}$ mažėja intervale $(-\infty; 0)$ ir intervale $(0; +\infty)$. Kai $k < 0$, tai funkcija $y = \frac{k}{x}$ didėja intervale $(-\infty; 0)$ ir intervale $(0; +\infty)$.

Nubraižykime funkcijos $y = \frac{1}{x}$ grafiką. Iš pradžių nubraižykime grafiko šaką intervale $(0; +\infty)$. Sudarome funkcijos reikšmių lentelę:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

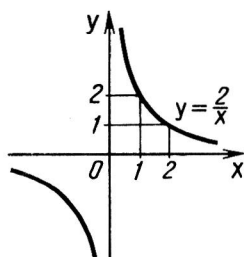


a)



b)

25 pav.



26 pav.

Gautus taškus pažymėkime koordinatinių plokštumoje ir sujunkime juos glodžia kreive (25a pav.). Tai ir bus funkcijos $y = \frac{1}{x}$ grafiko šaka intervale $(0; +\infty)$.

Kadangi funkcija $y = \frac{1}{x}$ nelyginė, prijunkime prie nubrėžtos šakos kitą šaką, simetrišką jai koordinatinių pradžių atžvilgiu. Gauname funkcijos $y = \frac{1}{x}$ grafiką (25b pav.).

Analogiškai atrodo funkcijos $y = \frac{k}{x}$ grafikas, kai k — bet kuris teigiamas skaičius. 26 paveiksle pavaizduotas funkcijos $y = \frac{2}{x}$ grafikas.

Kai $k < 0$, tai atvirkštinio proporcingumo grafiko šakos yra ne I ir III koordinatiniuose kampuose, kaip kad atveju $k > 0$, o II ir IV kampuose. 27 paveiksle pavaizduoti funkcijų

$$y = -\frac{1}{x}, \quad y = -\frac{2}{x}$$

grafikai.

Atvirkštinio proporcingumo $y = \frac{k}{x}$ grafiką vadiname *hiperbole*.

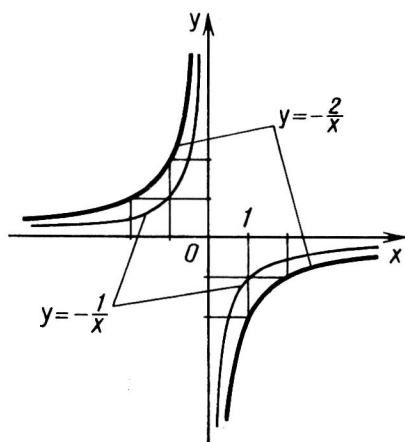
75. Funkcija $y = x^2$. Išvardysime funkcijos $y = x^2$ savybes.

- 1) Funkcijos apibrėžimo sritis — visa skaičių tiesė.
- 2) $y = x^2$ — lyginė funkcija ($f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$).
- 3) Funkcija didėja intervale $[0; +\infty)$.

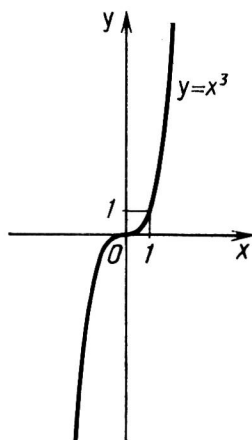
Iš tikrųjų, kai $0 \leq x_1 < x_2$, tai $x_1^2 < x_2^2$, o tai ir reiškia, kad funkcija didėja (žr. 69 skyrelį).

- 4) Funkcija mažėja intervale $(-\infty; 0]$.

Iš tikrųjų, kai $x_1 < x_2 \leq 0$, tai $-x_1 > -x_2 \geq 0$, todėl $(-x_1)^2 > (-x_2)^2$, t. y. $x_1^2 > x_2^2$, o tai reiškia, kad funkcija mažėja (žr. 69 skyrelį).



27 pav.



28 pav.

Funkcijos $y=x^2$ grafikas yra *parabolė* (žr. 66 skyrelį). Jis pavaizduotas 11 paveiksle.

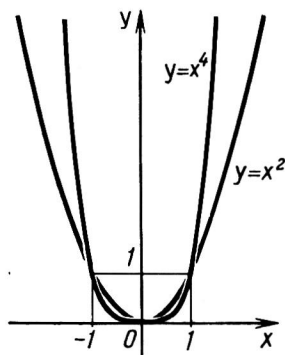
76. Funkcija $y=x^3$. Išvardysime funkcijos $y=x^3$ savybes.

1) Funkcijos apibrėžimo sritis — visa skaičių tiesė.

2) $y=x^3$ — nelyginė funkcija ($f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$).

3) Funkcija $y=x^3$ didėja visoje skaičių tiesėje.

Funkcijos $y=x^3$ grafikas pavaizduotas 28 paveiksle. Jį vadiname *kubine parabole*.



29 pav.

77. Laipsninė funkcija su natūraliuoju rodikliu. Funkciją $y=x^n$, kai n — natūralusis skaičius, vadiname *laipsnine funkcija su natūraliuoju rodikliu*. Kai $n=1$, gauname funkciją $y=x$; jos savybės išnagrinėtos 71 skyrelyje, o grafikas (tiesė) pavaizduotas 10 paveiksle. Kai $n=2$, gauname funkciją $y=x^2$; jos savybės išnagrinėtos 75 skyrelyje, o grafikas (parabolė) pavaizduotas 11 paveiksle. Kai $n=3$, gauname funkciją $y=x^3$; jos savybės išnagrinėtos 76



skyrelyje, o grafikas (kubinė parabolė) pavaizduotas 28 paveiksle.

Sakykime, kad n — bet kuris lyginis skaičius, didesnis už 2, $n=4, 6, 8, \dots$. Tada funkcija $y=x^n$ pasižymi tomis pačiomis savybėmis, kaip ir funkcija $y=x^2$. Tokios funkcijos grafikas primena parabolę $y=x^2$ (tik kuo didesnis n , tuo staigiau grafiko šakos, kai $|x| > 1$, kyla į viršų) (29 pav.).

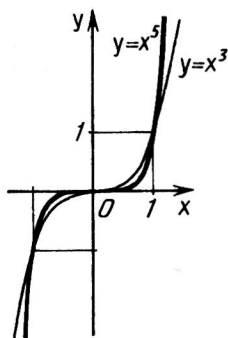
Sakykime, kad n — bet kuris nelyginis skaičius, didesnis už 3, $n=5, 7, 9, \dots$. Tada funkcija pasižymi tomis pačiomis savybėmis, kaip ir funkcija $y=x^3$. Tokios funkcijos grafikas primena kubinę parabolę (tik kuo didesnis n , tuo staigiau grafiko šakos eina į viršų ir į apačią) (30 pav.). Pabrėžiame, kad intervale $(0; 1)$ laipsninės funkcijos $y=x^n$ grafikas tuo lėčiau tolsta nuo x ašies didėjant x , kuo didesnis n .

78. Laipsninė funkcija su sveikuoju neigiamuoju rodikliu. Nagrinėkime funkciją $y=x^{-n}$, kai n — natūralusis skaičius. Kai $n=1$, gauname $y=x^{-1}$, arba $y=\frac{1}{x}$. Šios funkcijos savybės išnagrinėtos 74 skyrelyje, o jos grafikas (hiperbolė) pavaizduotas 25b paveiksle.

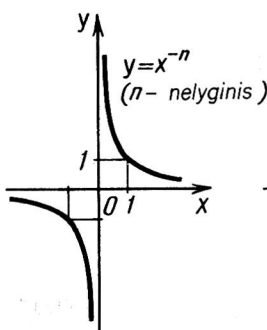
Sakykime, kad n — nelyginis skaičius, didesnis už vienetą, $n=3, 5, 7, \dots$. Tada funkcija $y=x^{-n}$ iš esmės turi tas pačias savybes, kaip ir funkcija $y=\frac{1}{x}$. Funkcijos $y=x^{-n}$ ($n=3, 5, 7, \dots$) grafikas primena funkcijos $y=\frac{1}{x}$ grafiką (31 pav.).

Sakykime, kad n — lyginis skaičius, pavyzdžiui, $n=2$. Išvardysime funkcijos $y=x^{-2}$, t. y. funkcijos $y=\frac{1}{x^2}$ savybes.

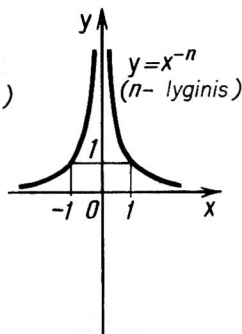
1) Funkcija apibrėžta su visais $x \neq 0$.



30 pav.



31 pav.



32 pav.



2) $y = \frac{1}{x^2}$ — lyginė funkcija.

3) $y = \frac{1}{x^2}$ mažėja intervale $(0; +\infty)$ ir didėja intervale $(-\infty; 0)$.

Tas pačias savybes turi kiekviena funkcija $y = x^{-n}$, kai n lyginis ir didesnis už 2.

Funkcijos $y = \frac{1}{x^2}$ grafikas pavaizduotas 32 paveiksle. Panašūs ir funkcijų $y = x^{-n}$, $n = 4, 6, \dots$, grafikai.

79. Funkcija $y = \sqrt{x}$. Išvardysime funkcijos $y = \sqrt{x}$ savybes.

1) Funkcijos apibrėžimo sritis — spindulys $[0; +\infty)$, kadangi reiškinys $\sqrt{x}$ apibrėžtas, kai $x \geq 0$.

2) Funkcija $y = \sqrt{x}$ nėra nei lyginė, nei nelyginė.

3) Funkcija $y = \sqrt{x}$ didėja spindulyje $[0; +\infty)$.

Iš tikrųjų, sakykime, kad $0 \leq x_1 < x_2$. Įrodysime, kad $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$. Tarkime priešingai, t. y. kad $\sqrt{x_1} \geq \sqrt{x_2}$. Tada $(\sqrt{x_1})^2 \geq (\sqrt{x_2})^2$ (žr. 24 skyrelyje skaitinių nelygybių 9^o savybę), t. y. $x_1 \geq x_2$; tai prieštarauja sąlygai. Vadinas, mūsų prielaida neteisinga, ir teisinga nelygybė $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$.

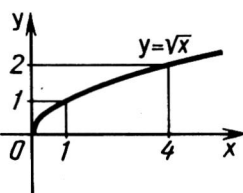
Nubraižykime funkcijos grafiką. Sudarome lentelę:

x	0	1	2	4	9
y	0	1	1,4	2	3

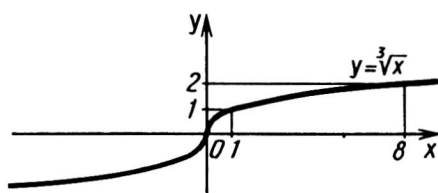
Gautus taškus pažymėkime koordinačių plokštumoje ir sujunkime glodžia kreive. Gauname funkcijos $y = \sqrt{x}$ grafiką (33 pav.).

80. Funkcija $y = \sqrt[3]{x}$. Išvardysime funkcijos $y = \sqrt[3]{x}$ savybes.

1) Funkcijos apibrėžimo sritis — visa skaičių tiesė.



33 pav.



34 pav.



2) Funkcija $y = \sqrt[3]{x}$ nelyginė, nes $\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$.

3) Funkcija $y = \sqrt[3]{x}$ didėja visoje skaičių tiesėje.

Nubraižykime funkcijos $y = \sqrt[3]{x}$ grafiko šaką, kai $x \geq 0$. Sudarome lentelę:

x	0	1	4	8
y	0	1	1,6	2

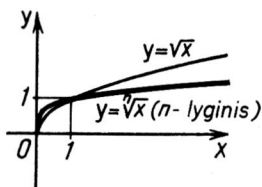
Gautus taškus pažymėkime koordinatinių plokštumoje ir sujunkime glodžia kreive; paskui prie nubrėžtos šakos prijunkime šaką, simetrišką jai koordinatinių pradžių atžvilgiu. Gauname funkcijos $y = \sqrt[3]{x}$ grafiką (34 pav.).

81. Funkcija $y = \sqrt[n]{x}$. Kai n lyginis, tai funkcija $y = \sqrt[n]{x}$ turi tas pačias savybes, kaip ir funkcija $y = \sqrt{x}$ (žr. 79 skyrelį), o jos grafikas primena funkcijos $y = \sqrt{x}$ grafiką (35 pav.). Kai n nelyginis,

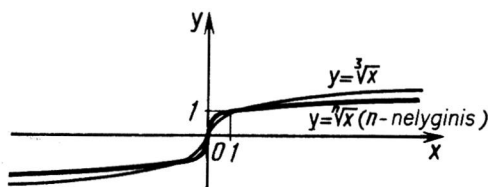
tai funkcija $y = \sqrt[n]{x}$ turi tas pačias savybes, kaip ir funkcija $y = \sqrt[3]{x}$ (žr. 80 skyrelį), o jos grafikas primena funkcijos $y = \sqrt[3]{x}$ grafiką (36 pav.).

82. Laipsninė funkcija su teigiamuoju trupmeniniu rodikliu. Nagrinėkime funkciją $y = x^r$, kai r — teigiamoji nesuprastinamoji trupmena. Išvardysime tos funkcijos savybes.

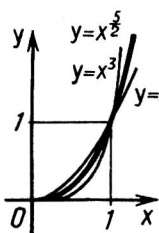
- 1) Apibrėžimo sritis — spindulys $[0; +\infty)$.
- 2) Funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė.
- 3) Funkcija $y = x^r$ didėja visame spindulyje $[0; +\infty)$.



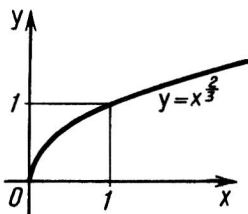
35 pav.



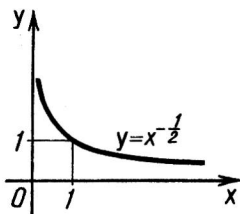
36 pav.



37 pav.



38 pav.



39 pav.

37 paveiksle pavaizduotas funkcijos $y=x^{\frac{5}{2}}$ grafikas. Jis yra tarp funkcijų $y=x^2$ ir $y=x^3$, apibrėžtų intervale $[0; +\infty)$, grafikų.

Panašiai atrodo bet kurios funkcijos $y=x^r$, kai $r>1$, grafikas.

38 paveiksle pavaizduotas funkcijos $y=x^{\frac{2}{3}}$ grafikas. Panašiai atrodo bet kurios funkcijos $y=x^r$, kai $0<r<1$, grafikas.

83. Laipsninė funkcija su neigiamuoju trupmeniniu rodikliu. Nagrinėkime funkciją $y=x^{-r}$, kai r — teigiamoji nesuprastinamoji trupmena. Išvardysime šios funkcijos savybes.

- 1) Apibrėžimo sritis — intervalas $(0; +\infty)$.
- 2) Funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė.
- 3) Funkcija mažėja visame intervale $(0; +\infty)$.

Nubraižykime, pavyzdžiui, funkcijos $y=x^{-\frac{1}{2}}$ grafiką. Sudarome funkcijos reikšmių lentelę:

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	4	9
y	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Gautus taškus pažymėkime koordinatinių plokštumoje ir sujunkime juos glodžia kreive (39 pav.). Panašiai atrodo bet kurios funkcijos $y=x^{-r}$, kai r — teigiamoji trupmena, grafikas.

84. Funkcija $y=[x]$. Funkcija $y=\{x\}$. Sakysime, x — realusis skaičius. Jo sveikąją dalimi vadiname didžiausią teigiamąjį skaičių, ne didesnį už x . Skaičiaus x sveikąją dalį žymime taip: $[x]$. Skaičiaus x trupmeninę dalimi vadiname to skaičiaus ir jo svei-

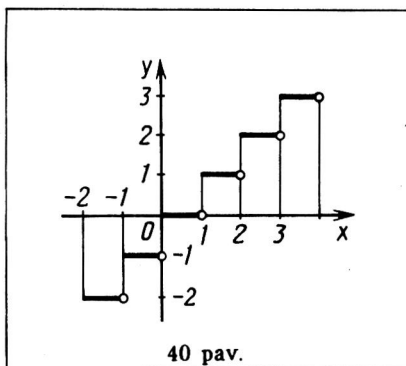
kosios dalies skirtumą, t. y. $x - [x]$. Skaiciaus x trupmeninę dalį žymime taip: $\{x\}$. Vadina-
si,

$$\{x\} = x - [x].$$

Pavyzdžiui, $[2,35] = 2$, o $\{2,35\} = 0,35$;

$[10] = 10$, o $\{10\} = 0$;

$[-0,85] = -1$, o $\{-0,85\} = -0,85 - (-1) = 0,15$.



40 pav.

Nubraižykime funkcijos $y = [x]$ grafiką. Kai $0 \leq x < 1$, tai $y = [x] = 0$; kai $1 \leq x < 2$, tai $y = [x] = 1$; kai $-1 \leq x < 0$, tai $y = [x] = -1$ ir t. t. Funkcijos $y = [x]$ grafikas pavaizduotas 40 paveiksle.

Nubraižykime funkcijos $y = \{x\}$ grafiką. Kadangi $\{x+1\} = \{x\}$, tai užtenka iš pradžių nubraižyti grafiko dalį bet kuriame ilgio 1 intervale, pavyzdžiui, intervale $[0; 1)$. Kai $0 \leq x < 1$, tai $[x] = 0$, todėl $\{x\} = x$.

41a paveiksle pavaizduotas funkcijos $y = \{x\}$ intervale $[0; 1)$ grafikas, o 41b paveiksle pavaizduotas funkcijos $y = \{x\}$ grafikas visoje skaičių tiesėje.

85. Rodiklinė funkcija. Rodiklinę funkciją apibrėžiame formule $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

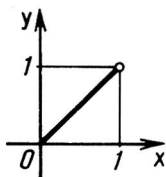
Išvardysime funkcijos $y = a^x$, kai $a > 1$, savybes.

1) Funkcijos apibrėžimo sritis — visa skaičių tiesė.

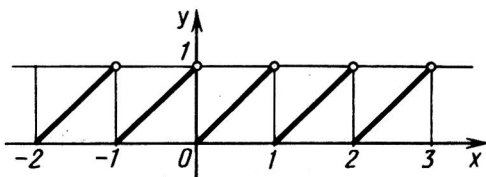
2) Funkcijos reikšmių sritis — intervalas $(0; +\infty)$.

3) Funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė. Tai aišku, nes $a^{-x} \neq a^x$ ir $a^{-x} \neq -a^x$.

4) Funkcija didėja visoje skaičių tiesėje.

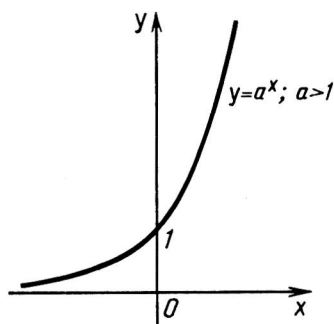


a)

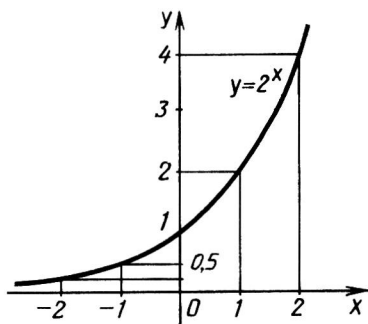


b)

41 pav.



42 pav.



43 pav.

Funkcijos $y=a^x$, kai $a>1$, grafikas pavaizduotas 42 paveiksle. Jau minėjome, kad ji įgyja kiekvieną teigiamą reikšmę.

1 pavyzdys. Nubraižykime funkcijos $y=2^x$ grafiką.

Sprendimas. Sudarome lentelę:

x	-2	-1	0	1	3
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	8

Pagal surastus taškus braižome funkcijos $y=2^x$ grafiką (43 pav.).

Funkcijos $y=a^x$, kai $0<a<1$, savybės.

1) Funkcijos apibrėžimo sritis — visa skaičių tiesė.

2) Reikšmių sritis — intervalas $(0; +\infty)$.

3) Funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė.

4) Funkcija mažėja visoje skaičių tiesėje.

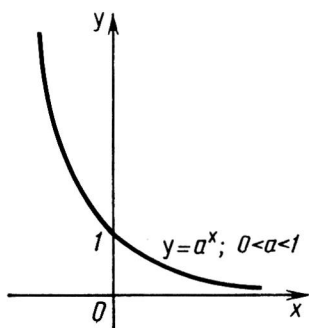
Funkcijos $y=a^x$, kai $0<a<1$, grafikas pavaizduotas 44 paveiksle. Jau minėjome, kad ji įgyja kiekvieną teigiamą reikšmę.

2 pavyzdys. Nubraižykime funkcijos $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ grafiką.

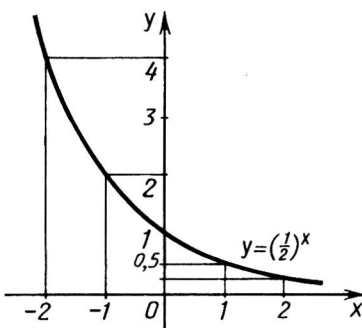
Sprendimas. Sudarome lentelę:

x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Pagal surastus taškus braižome funkcijos $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ grafiką (45 pav.).



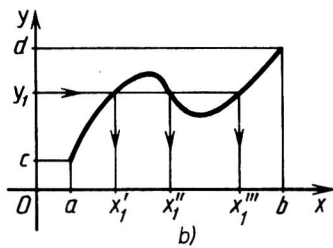
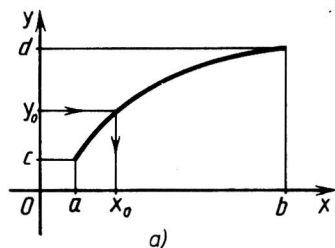
44 pav.



45 pav.

86. Atvirkštinė funkcija. Atvirkštinės funkcijos grafikas. Pa-lyginkime funkcijas $y=f(x)$ ir $y=g(x)$, kurių grafikai pavaizduoti 46 paveiksle. Abi jos apibrėžtos intervale $[a; b]$ ir abiejų reikšmių sritis yra intervalas $[c; d]$. Pirmą funkciją pasižymi to-čia savybe: kad ir kokį imtume y_0 iš intervalo $[c; d]$, yra tik viena reikšmė x_0 iš intervalo $[a; b]$ tokia, kad $f(x_0)=y_0$. Geometriškai ši savybė reiškia, kad kiekviena horizontali tiesė, kertanti y ašį tarp taškų c ir d , kerta funkcijos $y=f(x)$ grafiką tik viename taške. Antra funkcija šios savybės neturi. Pavyzdžiui, kai imame reikšmę y_1 , tiesė $y=y_1$ kerta funkcijos $y=g(x)$ grafiką trijuose taškuose. Vadinasi, pirmu atveju su kiekvienu fiksuotu y_0 iš in-tervalo $[c; d]$ lygtis $f(x)=y_0$ turi tik vieną šaknį x_0 , o antru atveju su kai kuriais y_1 lygtis $g(x)=y_1$ turi daugiau kaip vieną šaknį.

Jeigu funkcija $y=f(x)$ yra tokia, kad su kiekviena jos reikšme y_0 lygtis $f(x)=y_0$ turi x atžvilgiu vienintelę šaknį, tai sakome, kad funkcija f yra *apgėžiama*.



46 pav.



Taigi funkcija $y=f(x)$, kurios grafikas pavaizduotas 46a paveiksle, yra apgręžiama, o funkcija $y=g(x)$, kurios grafikas pavaizduotas 46b paveiksle, neapgręžiama.

Kai funkcija $y=f(x)$ apgręžiama, tai, išreiškę x iš formulės $y=f(x)$ ir sukeitę po to x ir y vietomis, gauname *atvirkštinę* funkciją.

Dar kartą pažiūrėkime į 46 paveikslą. Palyginę funkcijų $y=f(x)$ ir $y=g(x)$ grafikus, matome, kad $y=f(x)$ — didėjanti funkcija (ir ji turi atvirkštinę), o funkcija $y=g(x)$ nėra nei didėjanti, nei mažėjanti (ir neturi atvirkštinės). Funkcijos didėjimo ar mažėjimo užtenka, kad egzistuotų atvirkštinė.

3.3 t. Jeigu funkcija $y=f(x)$ apibrėžta ir didėja (mažėja) intervale X , o jos reikšmių sritis yra intervalas Y , tai ji turi atvirkštinę funkciją, ir ta atvirkštinė funkcija apibrėžta ir didėja (mažėja) intervale Y .

P a v y z d y s. Įrodykime, kad funkcija $y=2x-1$ turi atvirkštinę, ir raskime ją.

S p r e n d i m a s. Funkcija $y=2x-1$ didėja visoje skaičių tiesėje, todėl ji turi atvirkštinę. Norint ją rasti, reikia iš formulės $y=2x-1$ išreikšti x . Gauname $x=\frac{y+1}{2}$. Sukeitę x ir y vietomis, turime $y=\frac{x+1}{2}$. Tai ir yra ieškomoji atvirkštinė funkcija.

Jeigu taškas $(x; y)$ priklauso funkcijos $y=f(x)$ grafikui, tai taškas $(y; x)$ priklauso atvirkštinės funkcijos grafikui. Todėl atvirkštinės funkcijos grafiką gauname iš funkcijos $y=f(x)$ grafiko atlikę plokštumos xy transformaciją, kuri tašką $(y; x)$ perveda į tašką $(x; y)$. Tokia transformacija — tai simetrija tiesės $y=x$ atžvilgiu.

Taigi norint nubraižyti funkcijos, atvirkštinės funkcijai $y=f(x)$, grafiką, reikia atlikti funkcijos $y=f(x)$ grafiko simetriją tiesės $y=x$ atžvilgiu (47 pav.).

Pavyzdžiui, egzistuoja funkcijos $y=x^n$, $x \geq 0$, n — natūralusis, $n > 1$, atvirkštinė funkcija $y=\sqrt[n]{x}$. Tų viena kitai atvirkštinių funkcijų grafikai simetriški tiesės $y=x$ atžvilgiu (48 pav.).

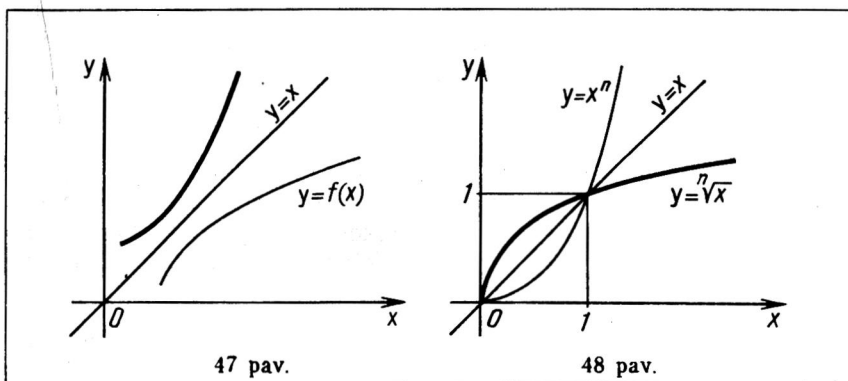
87. Logaritminė funkcija. Rodiklinė funkcija $y=a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, turi visas savybes, kurių reikia, kad egzistuotų atvirkštinė funkcija (žr. 3.3 teoremą).

1) Apibrėžimo sritis — $(-\infty; +\infty)$.

2) Reikšmių sritis — $(0; +\infty)$.

3) Funkcija $y=a^x$ didėja, kai $a > 1$, ir mažėja, kai $0 < a < 1$.

Vadinasi, egzistuoja funkcija, atvirkštinė rodiklinei funkcijai, kuri apibrėžta intervale $(0; +\infty)$ ir kurios reikšmių sritis yra $(-\infty; +\infty)$.



47 pav.

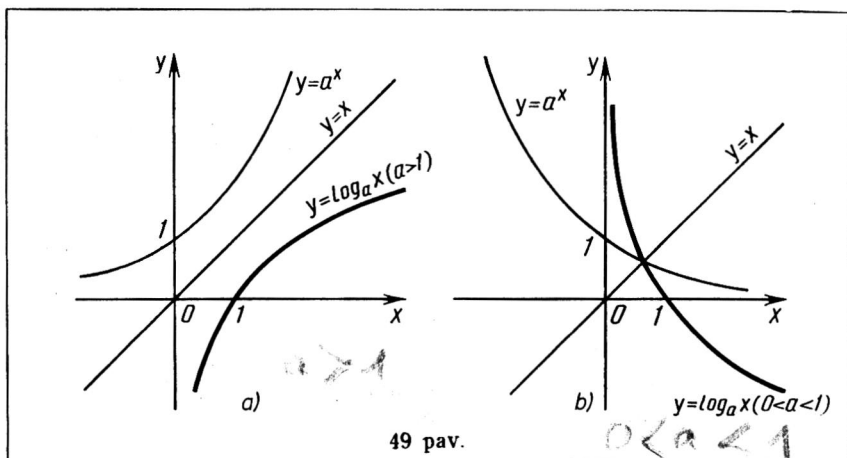
48 pav.

Tą atvirkštinę funkciją žymime taip: $y = \log_a x$ (skaitome: „skaičiaus x logaritmas pagrindu a “). Taigi *logaritminė funkcija* $y = \log_a x$, $a > 0$ ir $a \neq 1$, — tai funkcija, atvirkštinė rodiklinei funkcijai $y = a^x$.

Logaritminė funkcija $y = \log_a x$ turi tokias savybes (jos išplaukia iš 3.3 teoremos):

- 1) Apibrėžimo sritis — $(0; +\infty)$.
- 2) Reikšmių sritis — $(-\infty; +\infty)$.
- 3) Funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė.
- 4) Funkcija didėja intervale $(0; +\infty)$, kai $a > 1$; mažėja intervale $(0; +\infty)$, kai $0 < a < 1$.

Funkcijos $y = \log_a x$ grafiką galima gauti iš funkcijos $y = a^x$ grafiko, atlikus simetriją tiesės $y = x$ atžvilgiu. 49a paveiksle pavaizduotas logaritminės funkcijos, kai $a > 1$, o 49b paveiksle — kai $0 < a < 1$, grafikas.



49 pav.



88. Teigiamojo skaičiaus logaritmo apibrėžimas. Teigiamojo skaičiaus x logaritmu, turinčiu pagrindą a ($a > 0$, $a \neq 1$), vadiname rodiklį laipsnio, kuriuo reikia pakelti skaičių a , norint gauti skaičių x :

$$a^{\log_a x} = x.$$

Lygybė $\log_a x = y$ reiškia, kad $a^y = x$.

Pavyzdžiui, $\log_3 81 = 4$, nes $3^4 = 81$; $\log_{10} 0,001 = -3$, nes

$$10^{-3} = 0,001; \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2} = -\frac{1}{2}, \text{ nes } \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

Iš logaritmo apibrėžimo išplaukia tokios svarbios lygybės:

$$\log_a 1 = 0,$$

$$\log_a a = 1.$$

Pirmoji išplaukia iš lygybės $a^0 = 1$, o antroji — iš lygybės $a^1 = a$.

Apskritai teisinga lygybė $\log_a a^r = r$.

Užrašo $\log_a x$ skaičių a vadiname *logaritmo pagrindu*, x — *logaritmuojamuoju skaičiumi*.

89. Logaritmų savybės.

1°. Kai $x_1 > 0$ ir $x_2 > 0$, tai

$$\log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

(*sandaugos logaritmas lygus dauginamųjų logaritmų sumai*).

Pavyzdžiui, $\log_3 15 = \log_3 (3 \cdot 5) = \log_3 3 + \log_3 5 = 1 + \log_3 5$.

2°. Kai $x_1 > 0$ ir $x_2 > 0$, tai

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

(*dalmens logaritmas lygus dalinio ir daliklio logaritmų skirtumui*).

Pavyzdžiui, $\log_2 1,25 = \log_2 \frac{5}{4} = \log_2 5 - \log_2 4 = \log_2 5 - 2$.

Kai $x_1 < 0$ ir $x_2 < 0$, tai rašyti

$$\log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

negalima, nes tokios „lygybės“ dešinioji pusė neturi prasmės (neigiamojo skaičiaus logaritmas neegzistuoja). Čia galima samprotauti taip. Kadangi x_1 ir x_2 — neigiamieji skaičiai, tai $x_1 x_2 > 0$. Bet tada $x_1 x_2 = |x_1 x_2| = |x_1| \cdot |x_2|$. Vadinasi, $\log_a x_1 x_2 = \log_a |x_1| \cdot |x_2|$. Kadangi $|x_1| > 0$ ir $|x_2| > 0$, tai, remiantis 1° savybe, $\log_a |x_1| \cdot |x_2| = \log_a |x_1| + \log_a |x_2|$.

Taigi, kai $x_1 x_2 > 0$, tai

$$\log_a x_1 x_2 = \log_a |x_1| + \log_a |x_2|.$$



Analogiškai

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a |x_1| - \log_a |x_2|$$

(beje, abi paskutinės lygybės teisingos ir kai $x_1 > 0$, $x_2 > 0$).

3°. Kai $x > 0$, tai

$$\log_a x^r = r \log_a x$$

(laipsnio logaritmas lygus laipsnio rodiklio ir laipsnio pagrindo logaritmo sandaugai).

1 pavyzdys. $\log_5 81 = \log_5 3^4 = 4 \log_5 3$.

2 pavyzdys. $\log_3 \sqrt{2} = \log_3 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_3 2$.

3 pavyzdys. Apskaičiuokime $\log_2 \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$, kai $\log_2 3 = a$.

Sprendimas.

$$\log_2 \sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \log_2 \left(\frac{3}{4} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} (\log_2 3 - \log_2 4) = \frac{1}{3} (a - 2).$$

Teisingas toks teiginys: kai k — lyginis skaičius, tai $\log_a x^k = k \log_a |x|$ su kiekvienu $x \neq 0$.

Pavyzdžiui:

$$\log_2 x^4 = 4 \log_2 |x|; \quad \log_3 x^2 = 2 \log_3 |x|.$$

90. Logaritmo pagrindo keitimas. Teisingos tokios dvi savybės, kuriomis remiantis galima pakeisti logaritmo pagrindą:

1°. Kai $x > 0$, tai

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

(logaritmo pagrindo keitimo formulė).

Pavyzdžiui:

$$\log_2 3 = \frac{\log_5 3}{\log_5 2}; \quad \log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}.$$

2°. Kai $x > 0$, tai

$$\log_a x = \log_{a^k} x^k.$$

Pavyzdžiui, $\log_2 5 = \log_2 5^3 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{5}$.

1 pavyzdys. Apskaičiuokime $\log_5 6$, kai $\log_2 3 = a$, $\log_2 10 = b$.



Sprendimas. Pakeiskime logaritmo $\log_5 6$ pagrindą kitu — pagrindu 2. Taikome 1° savybę:

$$\log_5 6 = \frac{\log_2 6}{\log_2 5} = \frac{\log_2 (2 \cdot 3)}{\log_2 \frac{10}{2}} = \frac{\log_2 2 + \log_2 3}{\log_2 10 - \log_2 2} = \frac{1+a}{b-1}.$$

2 pavyzdys. Apskaičiuokime $\log_{\sqrt[6]{2}} \sqrt[6]{32}$.

Sprendimas. Remiantis 2° savybe, logaritmo pagrindą ir logaritmuojamą skaičių galima pakelti tuo pačiu laipsniu. Tada

$$\log_{\sqrt[6]{2}} \sqrt[6]{32} = \log_{(\sqrt[6]{2})^3} (\sqrt[6]{32})^3 = \log_2 \sqrt[6]{32} = \log_2 2^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}.$$

91. Logaritmovimas ir potencijavimas. Kai tam tikras reiškiny A sudarytas iš teigiamųjų skaičių, susijusių daugybos, dalybos ir kėlimo laipsniu operacijomis, tai, remiantis logaritmų savybėmis, $\log_a A$ galima išreikšti į A įeinančių skaičių logaritmais. Tokį pertvarkymą vadiname *logaritmovimu*.

1 pavyzdys. Išlogaritmuokime pagrindu 5 reiškinį $\frac{125a^3b^2}{\sqrt{c}}$, a, b, c — teigiamieji skaičiai.

Sprendimas. Taikydami logaritmų savybes (žr. 89 skyrelį), gauname $\log_5 \frac{125a^3b^2}{\sqrt{c}} = \log_5 (125a^3b^2) - \log_5 \sqrt{c} = \log_5 125 +$
 $+ \log_5 a^3 + \log_5 b^2 - \log_5 c^{\frac{1}{2}} = 3 + 3 \log_5 a + 2 \log_5 b - \frac{1}{2} \log_5 c.$

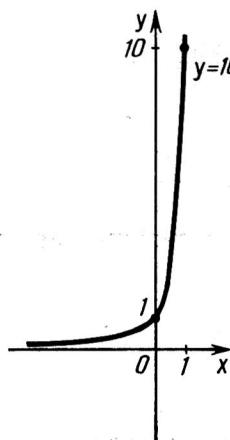
Dažnai tenka spręsti atvirkščią uždavinį: rasti reiškinį, kai žinomas jo logaritmas. Tokį pertvarkymą vadiname *potencijavimu*, arba *antilogaritmovimu*.

2 pavyzdys. Raskime x , kai $\log_3 x = 2 \log_3 5 + \frac{1}{2} \log_3 8 - 3 \log_3 10$.

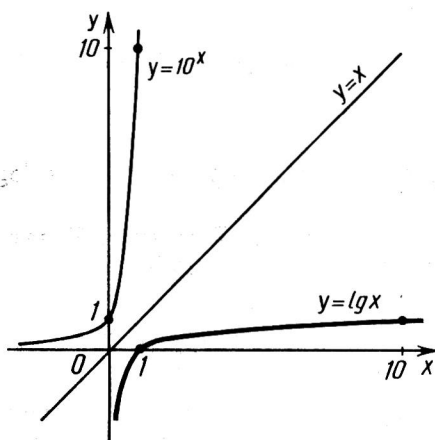
Sprendimas. $\log_3 x = \log_3 5^2 + \log_3 8^{\frac{1}{2}} - \log_3 10^3 =$
 $= \log_3 \frac{25 \cdot 2 \sqrt{2}}{1000} = \log_3 \frac{\sqrt{2}}{20}.$

Iš lygybės $\log_3 x = \log_3 \frac{\sqrt{2}}{20}$ randame, kad $x = \frac{\sqrt{2}}{20}$.

92. Dešimtainis logaritmas. Dešimtainio logaritmo charakteristika ir mantisė. Logaritmą, kurio pagrindas yra 10, vadiname *dešimtainiu* logaritmu. Užuoť rašę $\log_{10} x$, rašome $\lg x$. 50 ir 51 paveiksluose pavaizduoti funkcijų $y = 10^x$ ir $y = \lg x$ grafikai.



50 pav.



51 pav.

Pavyzdžiui, teisingos lygybės:

$$10^{\lg a} = a,$$

$$\lg 1 = 0,$$

$$\lg 0,1 = -1,$$

$$\lg 10 = 1,$$

$$\lg 0,01 = -2,$$

$$\lg 100 = 2,$$

$$\lg 0,001 = -3,$$

$$\lg 1000 = 3,$$

$$\lg 0,0001 = -4,$$

$$\lg 10^n = n.$$

Sakykime, teigiamojo skaičiaus a standartinė išraiška (žr. 33 skyrelį) yra $a = a_1 \cdot 10^n$, $1 \leq a_1 < 10$, $n \in \mathbb{Z}$ (n — skaičiaus a eilė). Logaritmuokime skaičių a pagrindu 10 ir remkimės logaritmų savybėmis (žr. 89 skyrelį):

$$\lg a = \lg(a_1 \cdot 10^n) = \lg a_1 + \lg 10^n = \lg a_1 + n.$$

Taigi

$$\lg a = \lg a_1 + n. \quad (1)$$

Kadangi $1 \leq a_1 < 10$, tai $\lg 1 \leq \lg a_1 < \lg 10$, t. y. $0 \leq \lg a_1 < 1$. Todėl iš (1) lygybės išplaukia, kad n yra didžiausias sveikasis skaičius, ne didesnis už $\lg a$, t. y. n yra skaičiaus $\lg a$ sveikoji dalis: $n = [\lg a]$ (žr. 84 skyrelį). Dėmuo $\lg a_1$ yra skaičiaus $\lg a$ trupmeninė dalis, t. y. $\lg a_1 = \{\lg a\}$ (žr. 84 skyrelį). Skaičiaus $\lg a$ sveikąją dalį, t. y. skaičiaus a eilę, vadiname logaritmo *charakteristika*, o skaičiaus $\lg a$ trupmeninę dalį — logaritmo *mantise*.



Teisingas toks teiginys: *skaičių $a > 0$ padauginus iš 10^k (k — sveikasis skaičius), logaritmo mantisė nepasikeičia*; kitaip tariant, $\lg a$ ir $\lg(a \cdot 10^k)$ mantisės yra vienodos.

Iš tikrųjų,

$$\lg(a \cdot 10^k) = \lg a + \lg 10^k = \lg a_1 \cdot 10^n + k = \lg a_1 + n + k.$$

Skaičiaus $\lg(a \cdot 10^k)$ mantisė yra $\lg a_1$, t. y. tas pats skaičius, kuris yra $\lg a$ mantisė.

§10. Grafikų transformacijos

93. Funkcijos $y = mf(x)$ grafiko braižymas. Aptarkime keletą uždavinių.

1 uždavinys. Nubraižyti funkcijos $y = mf(x)$, kai $m > 0$, $m \neq 1$, grafiką turint funkcijos $y = f(x)$ grafiką.

Sprendimas. Funkcijos $y = mf(x)$ grafiko taškų ordinatės gauname padauginę atitinkamas funkcijos $y = f(x)$ grafiko taškų ordinates iš m . Tokią funkcijos $y = f(x)$ grafiko transformaciją, kai $m > 1$, vadiname *ištempimu x ašies atžvilgiu, kurio koeficientas lygus m* , o kai $0 < m < 1$, — *sąspūdžiu x ašies atžvilgiu, kurio koeficientas lygus m* .

2 uždavinys. Nubraižyti funkcijos $y = -f(x)$ grafiką turint funkcijos $y = f(x)$ grafiką.

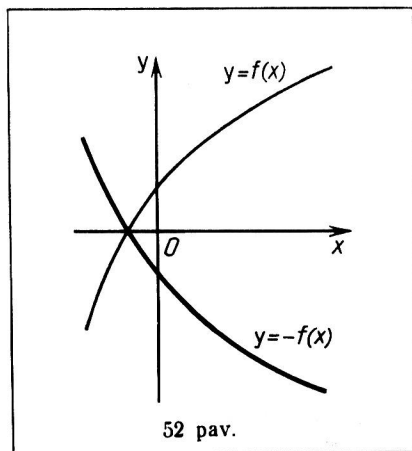
Sprendimas. Kai x reikšmė ta pati, funkcijos $y = f(x)$ ir funkcijos $y = -f(x)$ grafiko taškų ordinatės skiriasi tik ženklu. Todėl funkcijos $y = -f(x)$ grafiką galima gauti iš funkcijos $y = f(x)$ grafiko, atlikus jo simetriją x ašies atžvilgiu (52 pav.).

3 uždavinys. Nubraižyti funkcijos $y = mf(x)$, kai $m < 0$, $m \neq -1$, grafiką, turint funkcijos $y = f(x)$ grafiką.

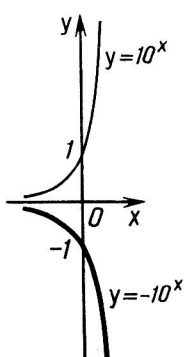
Sprendimas. Kadangi $mf(x) = -|m|f(x)$, tai funkcijos $y = mf(x)$ grafiką galima gauti taip: iš pradžių atlikti x ašies atžvilgiu funkcijos $y = -f(x)$ grafiko ištempimą (sąspūdį), kurio koeficientas lygus $|m|$, o po to — simetriją x ašies atžvilgiu (žr. 1 ir 2 uždavinius).

53 paveiksle pavaizduoti funkcijų $y = 10^x$ ir $y = -10^x$ grafikai.

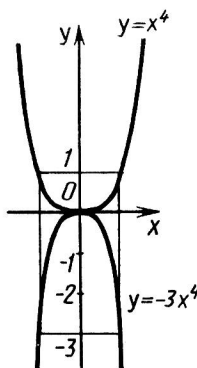
54 paveiksle pavaizduoti funkcijų $y = x^4$ ir $y = -3x^4$ grafikai.



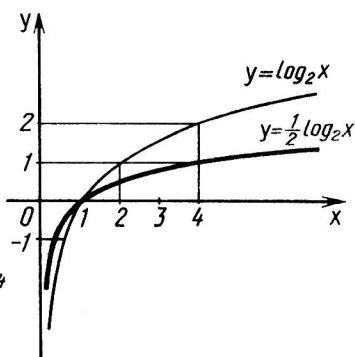
52 pav.



53 pav.



54 pav.



55 pav.

55 paveiksle pavaizduoti funkcijų $y = \log_2 x$ ir $y = \frac{1}{2} \lg_2 x$ grafikai.

94. Funkcijų $y = ax^2$, $y = ax^3$ grafikai. Funkcijos $y = x^2$ grafikas yra parabolė. Norint nubraižyti funkcijos $y = ax^2$ grafiką, reikia atlikti parabolės $y = x^2$ ištempį (sąspūdį) x ašies atžvilgiu, kurio koeficientas lygus $|a|$; be to, kai $a < 0$, reikia dar atlikti funkcijos $y = |a|x^2$ grafiko simetriją x ašies atžvilgiu (žr. 93 skyrelį).

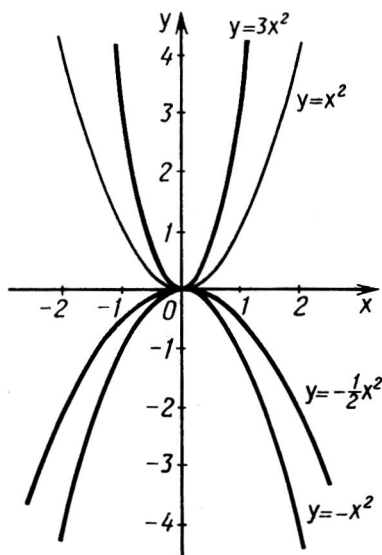
56 paveiksle pavaizduoti funkcijų $y = ax^2$, kai a lygus 1; -1; 3; $-\frac{1}{2}$, grafikai. Visus tuos grafikus vadiname *parabolėmis*. Kai $a > 0$, tai parabolės — funkcijos $y = ax^2$ grafiko — šakos nukreiptos aukštyn, o kai $a < 0$, — žemyn.

Panašiai turint funkcijos $y = x^3$ grafiką galima nubraižyti funkcijos $y = ax^3$ grafiką. 57 paveiksle pavaizduoti grafikai, kai a lygus 1; -1; 3.

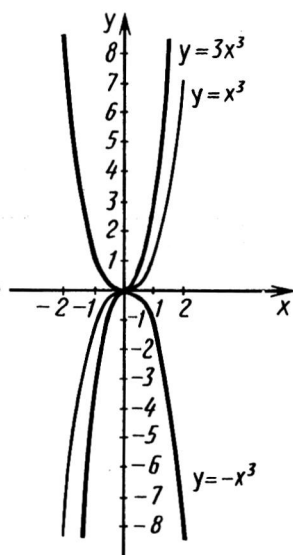
95. Funkcijos $y = f(x - m) + n$ grafiko braižymas. Sakykime, turime funkcijos $y = f(x)$ grafiką, ir reikia nubraižyti funkcijos $y = f(x - m) + n$ grafiką.

Pažymėkime $x' = x - m$, $y' = y - n$. Tada formulę $y = f(x - m) + n$, arba $y - n = f(x - m)$, galima parašyti taip: $y' = f(x')$. Vadinasi, funkcijos $y = f(x - m) + n$ grafikas, nubraižytas koordinatinių plokštumoje xy , sutampa su funkcijos $y' = f(x')$ grafiku, nubraižytu koordinatinių plokštumoje $x'y'$.

Formulės $x' = x - m$, $y' = y - n$, arba $x = x' + m$, $y = y' + n$, apibrėžia lygia-gretųjų postūmį, kuriuo kiekvienas taškas $(x; y)$ pervedamas į tašką $(m; n)$; skyrium imant, koordinatinių pradžia pervedama į tašką $(m; n)$.



56 pav.



57 pav.

Norint nubraižyti funkcijos $y=f(x-m)+n$ grafiką, reikia:

- 1) atlikti plokštumos lygiagretųjį postūmį, paėmus tašką O' ($m; n$) už naujosios koordinatinių $x'y'$ sistemos pradžią;
- 2) plokštumoje $x'y'$ nubraižyti funkcijos $y'=f(x')$ grafiką.

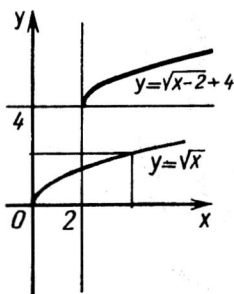
Pavyzdys. Nubraižykime funkcijos $y=\sqrt{x-2}+4$ grafiką.

Sprendimas. 1) Atlikime plokštumos lygiagretųjį postūmį, imdami tašką $O'(2; 4)$ už naujos koordinatinių $x'y'$ sistemos pradžią.

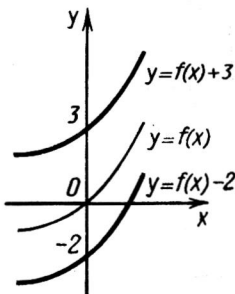
2) $x'y'$ plokštumoje braižykime funkcijos $y'=\sqrt{x'}$ grafiką. Tai ir yra norimas grafikas (58 pav.).

59 paveiksle pavaizduoti funkcijų $y=f(x)$, $y=f(x)-2$, $y=f(x)+3$ grafikai, o 60 paveiksle — funkcijų $y=f(x)$, $y=f(x-2)$, $y=f(x+3)$ grafikai.

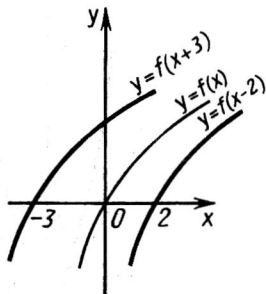
96. Kvadratinės funkcijos grafikas. Kvadratine funkcija vadiname funkciją, apibrėžtą formule $y=ax^2+bx+c$, kurios a, b, c — bet kurie realieji skaičiai, o $a \neq 0$. Kad būtų lengviau nubraižyti šios funkcijos grafiką, atlikime tokius kvadratinio trinomio ax^2+bx+c pertvarkymus (juos vadiname „pilnojo kvadrato išskyrimu“):



58 pav.



59 pav.



60 pav.

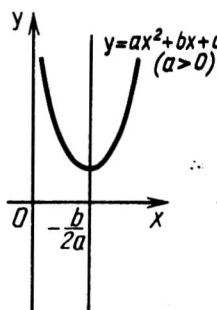
$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a} x \right) + c = a \left(\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{4a^2} \right) + c = \\
 &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} \right) + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}
 \end{aligned}$$

Taigi $y = ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$

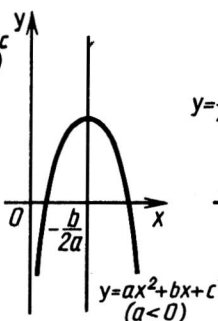
Norint nubraižyti funkcijos $y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ grafiką, reikia (žr. 95 skyrelį) atlikti plokštumos lygiagretųjį postūmį, imant tašką $O' \left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$ už naujos koordinačių $x'y'$ sistemos pradžių, ir $x'y'$ plokštumoje nubraižyti parabolę — funkcijos $y' = a(x')^2$ grafiką. Tiesę $x = -\frac{b}{2a}$ vadiname kvadratinės funkcijos $y = ax^2 + bx + c$ grafiko — parabolės — simetrijos ašimi, o tašką $O' \left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$, kuriame parabolė kerta savo simetrijos ašį, — parabolės viršūnę.

Kai $a > 0$, tai funkcijos $y = ax^2 + bx + c$ grafiko — parabolės — šakos nukreiptos aukštyn (61 pav.); šiuo atveju funkcija mažėja intervale $\left(-\infty; -\frac{b}{2a} \right]$ ir didėja intervale $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty \right)$. Kai $a < 0$, tai parabolės šakos nukreiptos žemyn (62 pav.); šiuo atveju funkcija didėja intervale $\left(-\infty; -\frac{b}{2a} \right]$ ir mažėja intervale $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty \right)$.

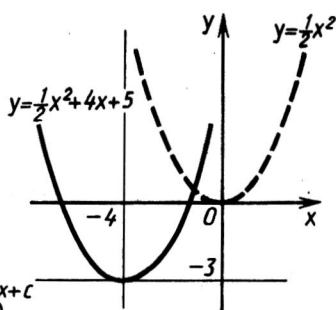
Pavyzdys. Nubraižykime funkcijos $y = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 5$ grafiką.



61 pav.



62 pav.



63 pav.

Sprendimas. $y = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 5 = \frac{1}{2}(x^2 + 8x) + 5 = \frac{1}{2}((x^2 + 8x + 16) - 16) + 5 = \frac{1}{2}(x + 4)^2 - 3$. Atlikime plokštumos lygiagretųjį postūmį, imdami tašką $O'(-4; -3)$ už naujos koordinatinių $x'y'$ sistemos pradžią. Koordinatinių $x'y'$ plokštumoje nubraižykime parabolę — funkcijos $y' = \frac{1}{2}(x')^2$ grafiką. Tai ir yra funkcijos $y = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 5$ grafikas (63 pav.).

97. Kvadratinės funkcijos grafiko braižymo būdai. Funkcijos $y = ax^2 + bx + c = 0$, kai $a \neq 0$, grafikas yra parabolė (žr. 96 skyrelį). Jai braižyti praktikoje taikomi trys būdai.

Pirmas būdas — parabolės viršūnės koordinatų radimas pagal formules

$$x_0 = -\frac{b}{2a}; \quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

1 pavyzdys. Nubraižykime funkcijos $y = 2x^2 - 4x + 1$ grafiką.

Sprendimas. Čia $a = 2$, $b = -4$, $c = 1$. Vadinas, $x_0 = -\frac{b}{2a} = 1$, $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = -1$. Taigi $(1; -1)$ — parabolės viršūnė. Per tašką $(1; -1)$ brėžiame parabolės simetrijos ašį. Apskaičiuokime dar kelių taškų koordinatas:

x	0	2	3
y	1	1	7

Koordinatinių plokštumoje pažymėję parabolės viršūnę, gautus taškus ir jiems simetriškus taškus, braižome reikiamą grafiką (64 pav.).

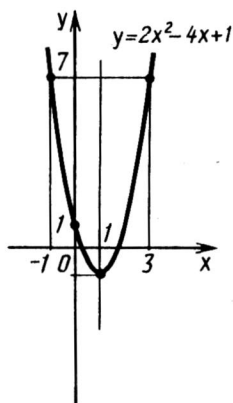
Antras būdas — *parabolės braižymas pagal taškus, kurių ordinatė lygi kvadratinio trinario ax^2+bx+c laisvajam nariui.*

2 pavyzdys. Nubraižykime funkcijos $y=x^2-4x+5$ grafiką.

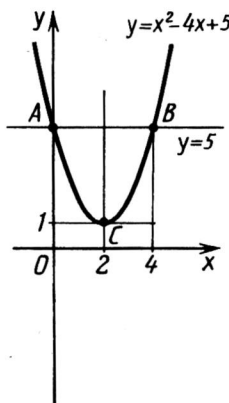
Sprendimas. Raskime grafiko taškus, kurių ordinatė lygi kvadratinio trinario laisvajam nariui, t. y. 5. Tam išspręsimė lygtį $x^2-4x+5=5$: $x^2-4x=0$, $x(x-4)=0$, iš čia $x_1=0$, $x_2=4$.

Radome du grafiko taškus: $A(0; 5)$ ir $B(4; 5)$. Pažymėkime juos koordinatinių plokštumoje (65 pav.). Žinome, kad grafikas yra parabolė. Taškai A ir B priklauso tai parabolei, o jų ordinatės vienodos. Vadinasi, taškai A ir B yra simetriški parabolės simetrijos ašies atžvilgiu. Todėl parabolės simetrijos ašis eina per atkarpos AB vidurį ir yra jai statmena. Kadangi taško A abscisė lygi nuliui, o taško B abscisė lygi keturiems, tai parabolės ašies lygtis yra $x=2$. Įrašę reikšmę $x=2$ į formulę $y=x^2-4x+5$, gauname $y=4-8+5=1$. Vadinasi, parabolės viršūnės C , t. y. vienetinio parabolės taško, esančio jos simetrijos ašyje, koordinatės yra $x_0=2$, $y_0=1$. Pažymėję koordinatinių plokštumoje tašką $C(2; 1)$, braižome parabolę, einančią per tris taškus A , B , C . Tai ir yra funkcijos $y=x^2-4x+5$ grafikas (žr. 65 pav.). (Norint nubraižyti tiksliau, galima rasti dar kelių taškų koordinates ir pažymėti juos.)

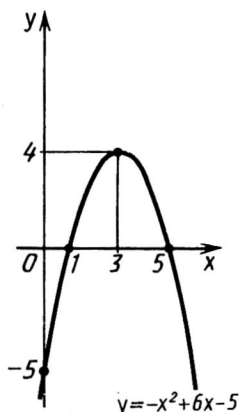
Trečias būdas — *parabolės braižymas pagal kvadratinio trinario šaknis.*



64 pav.



65 pav.



66 pav.



Sakykime, kad x_1 ir x_2 — kvadratinio trinario ax^2+bx+c šaknys (lygties $ax^2+bx+c=0$ sprendimas išnagrinėtas 101 skyrelyje). Tada funkcijos $y=ax^2+bx+c$ grafikas — parabolė — kerta abscisių ašį taškuose $A(x_1; 0)$ ir $B(x_2; 0)$. Tos parabolės simetrijos ašis eina per atkarpos AB vidurį ir yra jai statmena. Radę parabolės viršūnės C abscisę x_0 (taškas C yra parabolės simetrijos ašyje, todėl $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$), pagal formulę $y=ax^2+bx+c$ apskaičiuojame jos ordinatę. Dabar braižome parabolę per tris taškus A, B, C .

3 p a v y z d y s. Nubraižykime funkcijos $y=-x^2+6x-5$ grafiką.

S p r e n d i m a s. Iš lygties $-x^2+6x-5=0$ randame $x_1=1$, $x_2=5$. Vadinas, jau žinome ieškomosios parabolės du taškus: $A(1; 0)$ ir $B(5; 0)$. Parabolės simetrijos ašies lygtis yra $x=3$. Vietoj x įrašę reikšmę 3 į formulę $y=-x^2+6x-5$, randame $y=4$. Vadinas, parabolės viršūnė yra taškas $C(3; 4)$. Per tris taškus A, B ir C braižome parabolę — funkcijos $y=-x^2+6x-5$ grafiką (66 pav.).

IV SKYRIUS. LYGTYS IR LYGČIŲ SISTEMOS

§ 11. Lygtys su vienu kintamuoju

98. Lygties apibrėžimas. Lygties šaknys. Lygybę $f(x)=g(x)$ vadiname *lygtimi su vienu kintamuoju* x . Kiekvieną kintamojo reikšmę, su kuria reiškiniai $f(x)$ ir $g(x)$ įgyja lygias skaitines reikšmes, vadiname *lygties šaknimi*. Išspręsti lygtį — reiškia rasti visas jos šaknis arba įrodyti, kad jų nėra.

1 p a v y z d y s. Lygtis $3+x=7$ turi vienintelę šaknį 4, nes tik su šia kintamojo reikšme $3+x=7$ yra teisinga lygybė.

2 p a v y z d y s. Lygtis $(x-1)(x-2)=0$ turi dvi šaknis: 1 ir 2.

3 p a v y z d y s. Lygtis $x^2+1=0$ neturi šaknų.

99. Lygčių ekvivalentumas. Lygtis, turinčias tas pačias šaknis, vadiname *ekvivalenčiomis*. Ekvivalenčiomis laikome ir lygtis, kurių kiekviena neturi šaknų.

Pavyzdžiui, lygtys $x+2=5$ ir $x+5=8$ ekvivalenčios, nes kiekviena iš jų turi vienintelę šaknį — skaičių 3. Ekvivalenčios ir lygtys $x^2+1=0$ ir $2x^2+5=0$ — nė viena jų neturi šaknų.

Lygtys $x-5=1$ ir $x^2=36$ neekvivalenčios, nes pirma turi tik vieną šaknį $x=6$, o antra — dvi šaknis: 6 ir -6.

Spręsdami lygtį, stengiamės ją pakeisti paprastesne, bet ekvivalenčia lygtimi. Todėl svarbu žinoti, po kokių pertvarkymų lygtis virsta jai ekvivalenčia lygtimi.



- 4.1 t. | Jeigu kurį nors dėmenį perkelsime iš vienos lygties pusės į kitą ir pakeisime jo ženklą priešingu, tai gausime ekvivalenčią lygtį.

Pavyzdžiui, lygtis $x^2 + 2 = 3x$ ekvivalenti lygčiai $x^2 + 2 - 3x = 0$.

- 4.2 t. | Jeigu lygties abi pusės padauginsime arba padalysime iš to paties nelygaus nuliui skaičiaus, tai gausime ekvivalenčią lygtį.

Pavyzdžiui, lygtis $\frac{x^2 - 1}{3} = 2x$ ekvivalenti lygčiai $x^2 - 1 = 6x$ (pirmosios lygties abi pusės padauginome iš 3).

100. Tiesinės lygtys. Tiesinė lygtimi su vienu kintamuoju x vadiname lygtį $ax = b$ (a ir b — realieji skaičiai); a vadiname *kintamojo koeficientu*, b — *laisvuuoju nariu*.

Galimi trys tiesinės lygties $ax = b$ atvejai:

- 1) $a \neq 0$; tada lygties šaknis lygi $\frac{b}{a}$;
 - 2) $a = 0$, $b = 0$; tada lygtis virsta $0 \cdot x = 0$, o tokia lygybė teisinga su kiekvienu x ;
 - 3) $a = 0$, $b \neq 0$; tada lygtis virsta $0 \cdot x = b$ ir neturi šaknų.
- 1 p a v y z d y s. Išspręskime lygtį $\frac{1}{5}x + \frac{2}{15} = 0$.

S p r e n d i m a s. Remiantis 4.1 teorema (99 skyrelis) ši lygtis ekvivalenti lygčiai $\frac{1}{5}x = -\frac{2}{15}$. Šios lygties abi pusės padaliję iš $\frac{1}{5}$, gausime lygtį, ekvivalenčią pradinei (pagal 4.2 teoremą): $x = -\frac{2}{15} : \frac{1}{5}$, t.y. $x = -\frac{2}{3}$. Taigi $-\frac{2}{3}$ — lygties šaknis.

2 p a v y z d y s. Išspręskime lygtį $\frac{2}{3} + \frac{x}{4} + \frac{1-x}{6} = \frac{5x}{12} - 1$.

S p r e n d i m a s. Šią lygtį galima pertvarkyti į tiesinę lygtį. Padauginame abi lygties pusės iš 12 (vardiklių 3, 4, 6, 12 mažiausiojo bendrojo kartotinio):

$$12 \left(\frac{2}{3} + \frac{x}{4} + \frac{1-x}{6} \right) = 12 \left(\frac{5x}{12} - 1 \right),$$

tada

$$8 + 3x + 2 - 2x = 5x - 12,$$

$$8 + 2 + 12 = 5x - 3x + 2x,$$

$$4x = 22,$$

$$x = 5,5.$$



101. Kvadratinės lygtys. Lygtį

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (1)$$

kurios a, b, c — realieji skaičiai ir $a \neq 0$, vadiname *kvadratine lygtimi*. Kai $a=1$, tai kvadratinę lygtį vadiname *redukuotąja*, kai $a \neq 1$, — tai *neredukuotąja*. Skaičius a, b, c vadiname taip: a — pirmuoju koeficientu, b — antruoju koeficientu, c — laisvuju nariu.

Lygties $ax^2 + bx + c = 0$ šaknis randame pagal formulę

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (2)$$

Reiškinį $D = b^2 - 4ac$ vadiname (1) kvadratinės lygties *diskriminantu*. Kai $D < 0$, tai (1) lygtis neturi šaknų; kai $D = 0$, tai lygtis turi vieną šaknį; kai $D > 0$, tai lygtis turi dvi šaknis.

Kai $D = 0$, kartais sakome, kad kvadratinė lygtis turi dvi lygias šaknis.

Žymint $D = b^2 - 4ac$, (2) formulę galima perrašyti taip:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Kai $b = 2k$, (2) formulė virsta tokia:

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Taigi

$$x \pm \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}; \quad \text{čia } k = \frac{b}{2}. \quad (3)$$

(3) formulė ypač patogi tada, kai $\frac{b}{2}$ — sveikasis skaičius, t. y. kai koeficientas b — lyginis skaičius.

1 p a v y z d y s. Išspręskime lygtį $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

S p r e n d i m a s. Čia $a = 2$, $b = -5$, $c = 2$. Turime: $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$. Kadangi $D > 0$, tai lygtis turi dvi šaknis. Jas randame pagal (2) formulę:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}.$$

Taigi $x_1 = \frac{5+3}{4} = 2$, $x_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$, t. y. $x_1 = 2$ ir $x_2 = \frac{1}{2}$ — lygties šaknys.

2 p a v y z d y s. Išspręskime lygtį $x^2 + 6x + 9 = 0$.



Sprendimas. Cia $a=1$, $b=-6$, $c=9$. Pagal (3) formulę $x = \frac{3 \pm \sqrt{9-9 \cdot 1}}{1} = \frac{3 \pm 0}{1} = 3$, t. y. $x=3$ — lygties šaknis.

3 pavyzdys. Išspręskime lygtį $2x^2-3x+5=0$.

Sprendimas. Cia $a=2$, $b=-3$, $c=5$. Randame diskriminantą: $D=b^2-4ac=(-3)^2-4 \cdot 2 \cdot 5=-31$. Kadangi $D<0$, tai lygtis neturi šaknų.

102. Nepilnosios kvadratinės lygtys. Kai kvadratinės lygties $ax^2+bx+c=0$ antrasis koeficientas (b) arba laisvasis narys lygus nuliui, tai kvadratinę lygtį vadiname *nepilnąja*. Nepilnąsias lygtis išskiriame todėl, kad jų šaknis galima rasti netaikant kvadratinės lygties šaknų formulės — paprasčiau lygtį spręsti skaidant jos kairiąją pusę dauginamaisiais.

1 pavyzdys. Išspręskime lygtį $2x^2-5x=0$.

Sprendimas. Iškeliamo už skliaustų x : $x(2x-5)=0$. Vadinasi, arba $x=0$, arba $2x-5=0$, t. y. $x=2,5$. Taigi lygtis turi dvi šaknis: 0 ir 2,5.

2 pavyzdys. Išspręskime lygtį $3x^2-10=0$.

Sprendimas. Padalijame abi lygties puses iš 3: $x^2-\frac{10}{3}=0$, t. y. $(x-\sqrt{\frac{10}{3}})(x+\sqrt{\frac{10}{3}})=0$. Vadinasi, arba $x-\sqrt{\frac{10}{3}}=0$, ir $x=\sqrt{\frac{10}{3}}$; arba $x+\sqrt{\frac{10}{3}}=0$, ir $x=-\sqrt{\frac{10}{3}}$.

Taigi lygtis turi dvi šaknis: $\sqrt{\frac{10}{3}}$ ir $-\sqrt{\frac{10}{3}}$.

3 pavyzdys. Išspręskime lygtį $2x^2+5=0$.

Sprendimas. Kadangi $2x^2+5>0$ su visais x , tai lygtis $2x^2+5=0$ neturi šaknų.

103. Vieto teorema.

4.3 t.

Jeigu redukuotoji kvadratinė lygtis $x^2+px+q=0$ turi realiąsias šaknis, tai jų suma lygi $-p$, o sandauga lygi q , t. y.

$$x_1 + x_2 = -p,$$

$$x_1 x_2 = q \quad (4)$$

(redukuotosios kvadratinės lygties šaknų suma lygi ant-
rajam koeficientui su priešingu ženklu, o šaknų san-
dauga lygi laisvajam nariui).

Pateiksime dar keletą sąsajų, siejančių redukuotosios kvadratinės lygties šaknis ir koeficientus.

Raskime šaknų kvadratų sumą:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2.$$



Remdamiesi (4) formulėmis, gauname:

$$x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q. \quad (5)$$

Nagrinėkime šaknų kubų sumą:

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2).$$

Remdamiesi (4) ir (5) formulėmis, gauname:

$$x_1^3 + x_2^3 = -p(p^2 - 3q).$$

Teisinga teorema, atvirkštinė Vieto teoremai:

4.4 t. | Jeigu skaičiai x_1 ir x_2 tokie, kad $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$,
tai x_1 ir x_2 — kvadratinės lygties $x^2 + px + q = 0$ šaknys.

Si teorema dažnai padeda rasti kvadratinės lygties šaknis nesiremiant šaknų formule.

I p a v y z d y s. Išspręskime lygtį $x^2 - 9x + 14 = 0$.

S p r e n d i m a s. Pamėginkime rasti tokius skaičius x_1 ir x_2 , kad

$$x_1 + x_2 = 9,$$

$$x_1x_2 = 14.$$

Tokie skaičiai yra 2 ir 7. Remiantis 4.4 teorema, jie ir yra duotos kvadratinės lygties šaknys.

2 p a v y z d y s. Išspręskime lygtį $x^2 + 3x - 28 = 0$.

S p r e n d i m a s. Mėginkime rasti tokius skaičius x_1 ir x_2 , kad būtų teisingos lygybės

$$x_1 + x_2 = -3,$$

$$x_1x_2 = -28.$$

Nesunku pamatyti, kad tokie skaičiai yra -7 ir 4 . Jie ir yra duotos lygties šaknys.

104. Lygtys, kuriose kintamasis yra vardiklyje. Išnagrinėkime pavidalo

$$\frac{p(x)}{q(x)} = 0 \quad (6)$$

lygtį. Spręsdami tokias lygtis, remsimės teiginiu: *trupmena $\frac{m}{n}$ lygi nuliui tada ir tik tada, kai jos skaitiklis lygus nuliui, o vardiklis nelygus nuliui* (iš nulio dalyti negalima).

Todėl lygtį $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$ sprendžiame dviem etapais: iš pradžių sprendžiame lygtį $p(x) = 0$, po to tikriname kiekvieną šaknį, ar vardiklis $q(x)$ su rastąja kintamojo x reikšme nevirsta nuliui. Jei $q(x) \neq$



$\neq 0$, tai rastoji lygties $p(x)=0$ šaknis yra duotosios lygties šaknis. Jei $q(x)=0$, tai rastoji lygties $p(x)=0$ šaknis nėra duotosios lygties šaknis. Tada sakome, kad šita lygties $p(x)=0$ šaknis yra *pašalinė* (6) lygtčiai.

P a v y z d y s. Išspręskime lygtį $\frac{3x-6}{x^2-x-2}=0$.

S p r e n d i m a s. Iš lygties $3x-6=0$ randame $x=2$. Su šia x reikšme vardiklis x^2-x-2 virsta nuliui, todėl duotoji lygtis neturi šaknų.

105. Racionaliosios lygtys. Lygtį $f(x)=g(x)$, kurioje $f(x)$ ir $g(x)$ yra racionalieji reiškiniai, vadiname *racionaliąja*. Be to, kai $f(x)$ ir $g(x)$ — sveikieji reiškiniai, tai lygtį vadiname *sveikąja*. Kai bent vienas iš reiškinių $f(x)$ ir $g(x)$ yra trupmeninis, tai racionaliąją lygtį $f(x)=g(x)$ vadiname *trupmenine*.

Pavyzdžiui, sveikosios yra tiesinės (100 skyrelis), kvadratinės (101 skyrelis) lygtys.

Norint išspręsti racionaliąją lygtį, reikia:

- 1) rasti visų trupmenų bendrąjį vardiklį;
- 2) pakeisti duotąją lygtį sveikąja dauginant abi jos puses iš bendrojo vardiklio;
- 3) išspręsti gautą sveikąją lygtį;
- 4) atmesti tas jos šaknis, su kuriomis bendrasis vardiklis virsta nuliui.

P a v y z d y s. Išspręskime lygtį $\frac{2}{2-x} + \frac{1}{2} = \frac{4}{x(2-x)}$.

S p r e n d i m a s. Trupmenų bendras vardiklis yra $2x(2-x)$. Kiekvienai trupmenai nustatome papildomuosius daugiklius ir atsikratome vardiklių:

$$\frac{\overbrace{2}^{2x}}{2-x} + \frac{\overbrace{1}^{x(2-x)}}{2} = \frac{\overbrace{4}^2}{x(2-x)};$$

$$4x + x(2-x) = 8;$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0.$$

Iš lygties $x^2 - 6x + 8 = 0$ randame $x_1=2$, $x_2=4$ (žr. 101 skyrelį). Dabar dar reikia patikrinti, ar su rastosiomis šaknimis nevirsta nuliui reiškinys $2x(2-x)$, t. y. patikrinti, ar $2x(2-x) \neq 0$. Matome, kad 2 netenkina šios sąlygos, o 4 — tenkina. Vadinasi, $x=4$ — vienintelė lygties šaknis.

106. Lygties $p(x)=0$ sprendimas skaidant kairiąją pusę dauginamaisiais. Šio metodo esmė tokia. Sakykime, reikia išspręsti lygtį $p(x)=0$, kai $p(x)$ — n -tojo laipsnio daugianaris. Tarkime, kad daugianarį pavyko išskaidyti dauginamaisiais: $p(x)=p_1(x) \times p_2(x) \cdot p_3(x)$; čia $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ — žemesnio kaip n laipsnio



daugianariai. Lygtis $p(x)=0$ virsta tokia: $p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot p_3(x)=0$. Kai a — lygties $p(x)=0$ šaknis, tai $p_1(a) \cdot p_2(a) \cdot p_3(a)=0$, todėl bent vienas iš skaičių $p_1(a)$, $p_2(a)$, $p_3(a)$ lygus nuliui. Tai reiškia, kad a yra bent vienos iš lygčių

$$p_1(x)=0, \quad p_2(x)=0, \quad p_3(x)=0$$

šaknis.

Teisingas ir atvirkščias teiginys: jeigu $x=b$ — bent vienos iš lygčių $p_1(x)=0$, $p_2(x)=0$, $p_3(x)=0$ šaknis, tai b yra lygties $p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot p_3(x)=0$, t. y. lygties $p(x)=0$ šaknis.

Taigi kai $p(x)=p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot p_3(x)$ ir $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ — daugianariai, tai užuot sprendę lygtį $p(x)=0$, sprendžiame lygtis $p_1(x)=0$, $p_2(x)=0$, $p_3(x)=0$. Visos šių lygčių šaknys, ir tik jos, bus lygties $p(x)=0$ šaknys.

1 p a v y z d y s. Išspręskime lygtį $x^3+2x^2+3x+6=0$.

S p r e n d i m a s. Išskaidykime dauginamaisiais lygties kairiąją pusę: $x^2(x+2)+3(x+2)=0$, $(x+2)(x^2+3)=0$. Vadinas, arba $x+2=0$, arba $x^2+3=0$. Iš pirmos lygties randame $x=-2$, antroje lygtis neturi šaknų. Taigi duotoji lygtis turi vienintelę šaknį -2 .

Skaidymo dauginamaisiais metodas tinka bet kurioms pavidalo $p(x)=0$ lygtims ($p(x)$ — nebūtinai daugianaris). Sakykim, $p(x)=p_1(x)p_2(x)p_3(x)$, bet tarp reiškinių $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ yra sudėtingesnių negu daugianaris reiškinių (pavyzdžiui, iracionaliųjų, logaritminių reiškinių ir pan.). Tada tarp lygčių $p_1(x)=0$, $p_2(x)=0$, $p_3(x)=0$ šaknų gali būti pašalinių lygčiai $p(x)=0$.

2 p a v y z d y s. Išspręskime lygtį $x^2\sqrt{x-9}\sqrt{x}=0$.

S p r e n d i m a s. Kadangi $\sqrt{x(x^2-9)}=0$, tai arba $\sqrt{x}=0$, arba $x^2-9=0$. Iš lygties $\sqrt{x}=0$ randame $x=0$, iš lygties $x^2-9=0$ randame $x=\pm 3$. Bet -3 netinka pradinėi lygčiai, nes su šita reikšme neapibrėžtas reiškinyje $\sqrt{x}$. Tai pašalinė šaknis.

Taigi lygtis turi dvi šaknis: 3; 0.

107. Lygčių sprendimas naujo kintamojo įvedimo metodu. Metodo esmę paaiškinsime pavyzdžiais.

1 p a v y z d y s. Išspręskime lygtį $(x^2-3x)^2+3(x^2-3x)-28=0$.

S p r e n d i m a s. Pažymėję $x^2-3x=y$, gauname lygtį $y^2+3y-28=0$, ir randame $y_1=-7$, $y_2=4$. Dabar reikia išspręsti dvi lygtis: $x^2-3x=-7$ ir $x^2-3x=4$, t. y. $x^2-3x+7=0$ ir $x^2-3x-4=0$.

Pirma kvadratinė lygtis neturi realiųjų šaknų, nes jos diskriminantas neigiamas.

Iš antros kvadratinės lygties randame $x_1=4$, $x_2=-1$. Tai duotosios lygties šaknys.



2 p a v y z d y s. Išspręskime lygtį $\frac{24}{x^2+2x-8} - \frac{15}{x^2+2x-3} = 2$.

S p r e n d i m a s. Pažymėkime $x^2+2x-3=y$, tada $x^2+2x-8 = (x^2+2x-3)-5=y-5$. Lygtis tampa tokia: $\frac{24}{y-5} - \frac{15}{y} = 2$.

Išsprendę šią lygtį (žr. 105 skyrelį), gauname $y_1=12,5$ ir $y_2=-3$.

Bet $y=x^2+2x-3$. Vadinasi, užtenka išspręsti lygtis

$$x^2+2x-3=12,5 \quad \text{ir} \quad x^2+2x-3=-3,$$

arba $x^2+2x-15,5=0$ ir $x^2+2x=0$.

Iš pirmos lygties randame $x_1 = \frac{-2+\sqrt{66}}{2}$, $x_2 = \frac{-2-\sqrt{66}}{2}$; iš antros lygties gauname $x_3=0$, $x_4=-2$. Taigi rastos keturios duotosios lygties šaknys.

108. Bikvadratinės lygtys. *Bikvadratinė* vadiname lygtį $ax^4+bx^2+c=0$, kurios $a \neq 0$. Bikvadratinės lygtys sprendžiamos naujo kintamojo įvedimo metodu: pažymėję $x^2=y$, gauname kvadratinę lygtį $ay^2+by+c=0$.

P a v y z d y s. Išspręskime lygtį $x^4+4x^2-21=0$.

S p r e n d i m a s. Pažymėkime $x^2=y$. Gauname kvadratinę lygtį $y^2+4y-21=0$. Iš jos randame $y_1=-7$, $y_2=3$. Dabar užtenka išspręsti lygtis $x^2=-7$, $x^2=3$. Pirmą lygtį neturi šaknų, iš antros randame $x_1=\sqrt{3}$, $x_2=-\sqrt{3}$. Jos ir yra duotosios bikvadratinės lygties šaknys.

109. Uždavinių sprendimas sudarant lygtis. Sudarydami lygtis sprendžiame daugybę uždavinių, kylančių nagrinėjant įvairiausias fizikos, matematikos, ekonomikos ir daugelio kitų taikomųjų mokslų klausimus. Iš pradžių priminsime uždavinių sprendimo sudarant lygtis bendrą tvarką.

1) Įvedame kintamuosius, t. y. raidėmis x , y , z pažymime nežinomus dydžius, kuriuos reikia rasti uždavinyje arba kurių reikia ieškant nežinomų dydžių.

2) Naudodamiesi įvestais kintamaisiais ir uždavinyje duotais skaičiais ir jų sąsajomis, sudarome lygčių sistemą (arba lygtį).

3) Sprendžiame sudarytą lygčių sistemą (arba lygtį), po to atrenkame sprendinius, tinkančius pagal uždavinio prasmę.

1 u ž d a v i n y s. 60 t kroviniai pervežti buvo užsakyta tam tikras skaičius sunkvežimių. Dėl prasto kelio į kiekvieną sunkvežimį teko krauti 0,5 t mažiau negu buvo numatyta, todėl prireikė dar 4 sunkvežimių. Kiek sunkvežimių buvo užsakyta iš pradžių?

S p r e n d i m a s. Iš pradžių užsakytų sunkvežimių skaičių pažymėkime x . Tada iš tikrųjų buvo iškviesta $(x+4)$ sunkvežimiai. Kadangi reikėjo pervežti 60 t krovinį, tai buvo numatyta į kiek-



vieną sunkvežimį krauti $\frac{60}{x}$ t, o iš tikrųjų krovė $\frac{60}{x+4}$ t, ir tai yra 0,5 t mažiau negu kad buvo numatyta. Taigi gauname lygtį

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+4} = 0,5.$$

Ši lygtis turi dvi šaknis: -24 ir 20 . Aišku, kad pagal uždavinio prasmę -24 netinka. Vadinasi, iš pradžių buvo užsakyta 20 sunkvežimių.

2 uždavinys. Motorinė valtis, kurios greitis yra 20 km/h, nesustodama nuplaukė upe iš vienos vietovės į kitą ir grįžo per 6 h 15 min. Atstumas tarp vietovių lygus 60 km. Raskite upės tėkmės greitį.

Sprendimas. Upės tėkmės greitį pažymėkime x kilometrų per valandą. Valtis pasroviui plaukia greičiu $(20+x)$ km/h, o prieš srovę — greičiu $(20-x)$ km/h. Pasroviui valtis plaukė $\frac{60}{20+x}$ h, o prieš srovę — $\frac{60}{20-x}$ h. Kadangi iš viso sugaišo 6 h 15 min, t. y. $\frac{25}{4}$ h, tai gauname lygtį

$$\frac{60}{20+x} + \frac{60}{20-x} = \frac{25}{4}.$$

Ją išsprendę, randame dvi šaknis $x=4$, $x=-4$. Aišku, kad reikšmė -4 netinka pagal uždavinio prasmę. Taigi upės tėkmės greitis lygus 4 km/h.

3 uždavinys. Raskite dviženklį skaičių, kurio vienetų skaitmuo 2 vienetais didesnis už dešimčių skaitmenį, o to skaičiaus ir skaitmenų sumos sandauga lygi 144.

Sprendimas. Prisiminkime, kad kiekvieną dviženklį skaičių galima išreikšti reiškiniu $10a+b$; čia a — dešimčių skaitmuo, b — vienetų skaitmuo. Jei x — dešimčių skaitmuo, tai pagal sąlygą vienetų skaitmuo yra $x+2$, ir gauname

$$(10x + (x+2))(x + (x+2)) = 144.$$

Išsprendę šią lygtį, randame $x_1=2$, $x_2=-3$. Antra šaknis netinka pagal uždavinio prasmę.

Taigi dešimčių skaitmuo yra 2, vienetų skaitmuo yra 4; vadinasi, ieškomasis skaičius 24.

4 uždavinys. Du darbininkai, dirbdami kartu, tam tikrą darbą atliko per 6 h. Jeigu jie dirbtų atskirai, tai pirmas darbininkas visą darbą atliktų 5 h greičiau negu antras darbininkas. Per kiek valandų kiekvienas jų, dirbdamas atskirai, gali atlikti visą darbą?

Sprendimas. Prieš sprenddami šį uždavinį (ar kitus „darbo uždavinius“), atkreipkime dėmesį štai į ką: darbo našumas,



t. y. per laiko vienetą atliekama darbo dalis (pažymėkime ją A), ir visam darbui atlikti reikalingas laikas (jį pažymėkime t) — vienas kitam atvirkštiniai dydžiai, t. y. $At=1$. Laiką, reikalingą pirmam darbininkui atlikti visą darbą, pažymėkime x valandų, o antro darbininko laiką — $(x+5)$ valandų. Tada pirmas darbininkas per 1 h atlieka $\frac{1}{x}$ darbo dalį, o antras — $\frac{1}{x+5}$. Iš sąlygos žinome, kad jie, dirbdami kartu, visą darbą atliko per 6 h. Pirmas darbininkas per 6 h atliko $\frac{6}{x}$ darbo dalį, o antras — $\frac{6}{x+5}$ darbo dalį. Kadangi jie kartu atliko visą darbą, tai gauname lygtį

$$\frac{6}{x} + \frac{6}{x+5} = 1.$$

Ją išsprendę, randame $x=10$ ir $x=-3$. Pagal prasmę tinka tik pirmą reikšmę.

Taigi pirmas darbininkas visą darbą gali atlikti per 10 h, antras — per 15h.

5 uždavinys. 54 l talpos indas pilnas rūgštis. Iš jo buvo išpilti keli litrai rūgštis ir iki viršaus pripilta vandens. Po to buvo išpilta tiek pat litrų mišinio. Tada paaiškėjo, kad indo mišinyje liko 24 l grynos rūgštis. Kiek litrų rūgštis buvo išpilta pirmą kartą?

Sprendimas. Sakykime, kad pirmą kartą buvo išpilta x litrų rūgštis. Tada inde liko $(54-x)$ l rūgštis. Pripylus vandens, pasidarė 54 l mišinio, kuriame buvo $(54-x)$ l rūgštis. Vadinas, 1 litre mišinio yra $\frac{54-x}{54}$ l rūgštis (tirpalo koncentracija). Antrą kartą iš indo išpylus x l mišinio, buvo išpilta $\frac{54-x}{54} \cdot x$ l rūgštis.

Taigi pirmą kartą buvo išpilta x l rūgštis, antrą $\frac{54-x}{54} \cdot x$ l rūgštis, o iš viso buvo išpilta $54-24=30$ l rūgštis. Gauname lygtį

$$x + \frac{54-x}{54} \cdot x = 30.$$

Ją išsprendę, randame dvi šaknis: $x_1=90$ ir $x_2=18$. Aišku, kad reikšmė 90 netinka uždavinio sąlygai.

Vadinas, pirmą kartą buvo išpilta 18 l rūgštis.

6 uždavinys. Vario ir alavo lydinio **gabale**, kurio masė lygi 12 kg, yra 45% vario. Kiek alavo reikia pridėti prie šio gabalo, kad naujas lydinys turėtų 40% vario?

Sprendimas. Sakykime, kad pridėto alavo masė lygi x kilogramų. Tada gausime $(12+x)$ kg masės lydinį, kuriame 40% vario. Vadinas, naujame lydinyje yra $0,4(12+x)$ kg vario. Pradinis 12 kg masės lydinys turėjo 45% vario, t. y. vario jame bu-



vo $0,45 \cdot 12$ kg. Kadangi pradiniam ir naujam lydinys vario masė yra vienoda, tai gauname lygtį

$$0,4(12+x) = 0,45 \cdot 12.$$

Išsprendę šią lygtį, gauname $x=1,5$. Vadinas, prie pradinio lydinio reikia pridėti 1,5 kg alavo.

7 uždavinys. Viena plieno rūšis turi 5% nikelio, kita 40% nikelio. Kiek vienos ir kitos rūšies plieno reikia sulydyti, norint gauti 140 t plieno, kuriame būtų 30% nikelio?

Sprendimas. Sakykime, kad pirmos rūšies plieno masė lygi x tonų, tada antros rūšies plieno reikia paimti $(140-x)$ t. Pirmos rūšies plienas turi 5% nikelio, todėl x tonų to plieno turi $0,05x$ tonų nikelio. Antros rūšies plienas turi 40% nikelio, todėl $(140-x)$ t to plieno yra $0,4(140-x)$ t nikelio. Iš sąlygos žinome, kad sulydžius turi išeiti 140 t plieno, turinčio 30% nikelio, vadinas, jame turi būti $0,3 \cdot 140$ t nikelio. Bet šį nikelio kiekį sudaro $0,05x$ t nikelio, esančio pirmos rūšies pliene, ir $0,4(140-x)$ t nikelio, esančio antros rūšies pliene. Taigi gauname lygtį

$$0,05x + 0,4(140-x) = 0,3 \cdot 140,$$

iš kurios randame $x=40$. Vadinas, reikia paimti 40 t plieno, turinčio 5% nikelio, ir 100 t plieno, turinčio 40% nikelio.

110. Iracionaliosios lygtys. *Iracionaliąja* lygtimi vadiname lygtį, kurioje kintamasis yra po radikalo ženklų arba po kėlimo trupmeniniu laipsniu ženklų. Pavyzdžiui, iracionaliosios yra lygtys

$$\sqrt{x-2} = 2x-1, \quad x^{\frac{1}{3}} - 5 = 0 \text{ ir pan.}$$

Išnagrinėkime du iracionaliųjų lygčių sprendimo metodus: abiejų lygties pusių kėlimą tuo pačiu laipsniu ir naujų kintamųjų įvedimo metodą (žr. 107 skyrelį).

Abiejų lygties pusių kėlimo tuo pačiu laipsniu metodas yra toks:

a) duotąją iracionaliąją lygtį pertvarkome į tokią:

$$\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)};$$

b) gautos lygties abi pusės keliame n -tuoju laipsniu:

$$(\sqrt[n]{f(x)})^n = (\sqrt[n]{g(x)})^n;$$

c) atsižvelgiame, kad $(\sqrt[n]{a})^n = a$, ir gauname lygtį

$$f(x) = g(x);$$

d) sprendžiame lygtį ir tikriname gautąsias šaknis, nes keldami tuo pačiu lyginiu laipsniu abi lygties puses, galime gauti pa-



šalinių šaknų. Pavyzdžiui, lygtis $x-1=3$ turi vieną šaknį 4, o lygtis $(x-1)^2=3^2$ turi dvi šaknis 4 ir -2 ; šaknis -2 yra lygties $x-1=3$ pašalinė šaknis. Todėl keliant iracionaliųjų lygčių puses tuo pačiu laipsniu, būtina tikrinti visas rastąsias šaknis. Dažniausiai tikriname įrašydami rastąsias kintamojo reikšmes į pradinę lygtį.

1 pavyzdys. Išspręskime lygtį $\sqrt[6]{x-3}=2$.

Sprendimas. Pakėlę lygties abi puses šeštuoju laipsniu, gauname $x-3=64$, iš čia $x=67$.

Patikrinimas. Įrašę į duotąją lygtį vietoj x reikšmę 67, gauname $\sqrt[6]{67-3}=2$, t. y. teisingą lygybę $2=2$.

Atsakymas. 67.

2 pavyzdys. Išspręskime lygtį $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x+6}=6$.

Sprendimas. Atskiriame vieną radiklą:

$$\sqrt{2x+6}=6-\sqrt{x-1};$$

keliame abi lygties puses kvadratu:

$$(\sqrt{2x+6})^2=(6-\sqrt{x-1})^2;$$

iš čia

$$2x+6=36-12\sqrt{x-1}+x-1,$$

$$12\sqrt{x-1}=29-x.$$

Dar kartą keliame abi lygties puses kvadratu:

$$144(x-1)=(29-x)^2,$$

$$x^2-202x+985=0.$$

Randame $x_1=5$, $x_2=197$.

Patikrinimas. 1) Kai $x=5$, tai

$$\sqrt{5-1} + \sqrt{2 \cdot 5 + 6} = 6.$$

Vadinasi, $x=5$ yra duotosios lygties šaknis.

2) $\sqrt{197-1} + \sqrt{2 \cdot 197 + 6} \neq 6$. Vadinasi, $x=197$ — pašalinė šaknis.

Atsakymas. 5.

3 pavyzdys. Išspręskime lygtį $(x-2)^{\frac{2}{5}} - (x-2)^{\frac{1}{5}} = 2$.

Sprendimas. Įveskime naują kintamąjį: $y=(x-2)^{\frac{1}{5}}$. Tada $(x-2)^{\frac{2}{5}}=y^2$, ir gauname lygtį $y^2-y-2=0$. Randame dvi šaknis: $y_1=2$, $y_2=-1$.



Dabar užtenka išspręsti dvi lygtis: $(x-2)^{\frac{1}{5}}=2$; $(x-2)^{\frac{1}{5}}=-1$.

Lygties $(x-2)^{\frac{1}{5}}=2$ abi puses pakėlę penktuoju laipsniu, gauname $x-2=32$, t. y. $x=34$.

Lygtis $(x-2)^{\frac{1}{5}}=-1$ neturi šaknų, nes trupmeniniu laipsniu kelti galima tik neneigiamąjį skaičių, o bet kuris neneigiamojo skaičiaus laipsnis yra neneigiamas.

A t s a k y m a s. 34.

111. Rodiklinės lygtys. Rodiklinei lygčiai dažniausiai galima suteikti pavidalą

$$a^{f(x)} = a^{g(x)};$$

čia $a > 0$, $a \neq 1$. Pastaroji lygtis ekvivalenti lygčiai $f(x) = g(x)$.

Yra du pagrindiniai rodiklinių lygčių sprendimo būdai: 1) rodiklių sulyginimo metodas, kai lygtis pertvarkoma į lygtį $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, o po to — į lygtį $f(x) = g(x)$; 2) naujo kintamojo įvedimo metodas.

1 p a v y z d y s. Išspręskime lygtį $2^{3x^2+3} = 2^{10x}$.

S p r e n d i m a s. Duotoji lygtis ekvivalenti lygčiai $3x^2+3=10x$, arba lygčiai $3x^2-10x+3=0$. Išsprendę kvadratinę lygtį, randame $x_1=3$, $x_2=\frac{1}{3}$.

2 p a v y z d y s. Išspręskime lygtį $\frac{(0,2)^{x-0,5}}{\sqrt{5}} = 5 \cdot 0,04^{x-1}$.

S p r e n d i m a s. Visų laipsnių pagrindą padarykime $\frac{1}{5}$. Gauname lygtį $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-0,5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{0,5} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \cdot \left(\left(\frac{1}{5}\right)^2\right)^{x-1}$, kurią pertvarkome į lygtį $\left(\frac{1}{5}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^{2x-3}$. Ji ekvivalenti lygčiai $x=2x-3$, iš čia $x=3$.

3 p a v y z d y s. Išspręskime lygtį $4x+2^{x+1}-24=0$.

S p r e n d i m a s. Spręskime įvesdami naują kintamąjį. Kadangi $4^x = (2^x)^2$, $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$, tai duotąją lygtį užrašome taip:

$$(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 24 = 0.$$

Įveskime naują kintamąjį: $2^x = y$. Gauname kvadratinę lygtį $y^2 + 2y - 24 = 0$, kurios šaknys yra $y_1=4$, $y_2=-6$. Dabar užtenka išspręsti dvi lygtis: $2^x=4$, $2^x=-6$.

Iš pirmos lygties randame $x=2$. Antra lygtis neturi šaknų, nes $2^x > 0$ su visomis x reikšmėmis.

A t s a k y m a s. 2.



112. Logaritminės lygtys. Logaritminę lygtį dažniausiai galima pakeisti lygtimi

$$\log_a f(x) = \log_a g(x); \text{ čia } a > 0, a \neq 1.$$

Norint išspręsti lygtį $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, reikia:

- 1) išspręsti lygtį $f(x) = g(x)$;
- 2) iš rastųjų šaknų išrinkti tas, kurios tinka nelygybei $f(x) > 0$ (arba $g(x) > 0$); kitos lygties $f(x) = g(x)$ šaknys yra pašalinės lygčiai $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

Yra du pagrindiniai logaritminių lygčių sprendimo būdai: 1) lygtį pertvarkant į lygtį $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, po to į lygtį $f(x) = g(x)$; 2) naujo kintamojo įvedimo metodas.

1 pavyzdys. Išspręskime lygtį $\log_3(x^2 - 3x - 5) = \log_3(7 - 2x)$.

Sprendimas. Duotąją lygtį pakeiskime lygtimi $x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x$ ir ją išspręskime. Turime $x^2 - x - 12 = 0$, iš čia $x_1 = -3$, $x_2 = 4$. Patikrinsime, ar rastosios x reikšmės tinka nelygybėms $x^2 - 3x - 5 > 0$ ir $7 - 2x > 0$. Reikšmė -3 nelygybėms tinka, o reikšmė 4 — ne. Vadinasi, 4 — pašalinė šaknis.

Atsakymas. -3 .

2 pavyzdys. Išspręskime lygtį $\lg(x+4) + \lg(2x+3) = \lg(1-2x)$.

Sprendimas. Logaritmų sumą pakeitę sandaugos logaritmu (žr. 89 skyrelį), lygtį pertvarkome:

$$\lg(x+4)(2x+3) = \lg(1-2x),$$

iš čia

$$(x+4)(2x+3) = 1-2x.$$

Iš paskutinės lygties randame $x_1 = -1$, $x_2 = -5,5$.

Dar reikia patikrinti, ar šaknys tinka nelygybių sistemai

$$\begin{cases} x+4 > 0, \\ 2x+3 > 0, \\ 1-2x > 0. \end{cases}$$

Irašę jas įsitikiname, kad -1 tinka visoms nelygybėms, o $-5,5$ — ne: pavyzdžiui, šita reikšmė netinka pirmai nelygybei. Vadinasi, $-5,5$ — pašalinė šaknis.

Atsakymas. -1 .

3 pavyzdys. Išspręskime lygtį $\log_2^2 x + \log_2 x + 1 = \frac{7}{\log_2 0,5x}$.

Sprendimas. Kadangi $\log_2 0,5x = \log_2 x + \log_2 0,5 = \log_2 x - 1$, tai duotąją lygtį galima užrašyti taip:

$$\log_2^2 x + \log_2 x + 1 = \frac{7}{\log_2 x - 1}.$$



Išveskime naują kintamąjį: $\log_2 x = y$. Gauname $y^2 + y + 1 = \frac{7}{y-1}$ ir $(y-1)(y^2 + y + 1) = 7$; $y^3 - 1 = 7$; $y^3 = 8$; $y = 2$. Bet $y = \log_2 x$; iš lygties $\log_2 x = 2$ randame $x = 4$.

A t s a k y m a s . 4 .

113. Grafinis lygčių sprendimas. Praktikoje dažnai naudingas *grafinis* lygčių sprendimo būdas: sprendami lygtį $f(x) = 0$, braižome funkcijos $y = f(x)$ grafiką ir randame taškų, kuriuose grafikas kerta x ašį, absceses; jos ir yra lygties šaknys. Pavyzdžiui, sprendžiant lygtį $ax^2 + bx + c = 0$ užtenka nubraižyti kvadratinės funkcijos $y = ax^2 + bx + c$ grafiką ir rasti absceses taškų, kuriuose jis kerta x ašį.

Pavyzdžiui, funkcijos $y = -x^2 + 6x - 5$ grafikas (žr. 66 pav.) kerta x ašį taškuose $(1; 0)$ ir $(5; 0)$, todėl lygtis $-x^2 + 6x - 5 = 0$ turi dvi šaknis: $x_1 = 1$ ir $x_2 = 5$. Funkcijos $y = x^2 - 4x + 5$ grafikas (žr. 65 pav.) nekerta abscesių ašies. Todėl lygtis $x^2 - 4x + 5 = 0$ neturi šaknų.

Dažnai lygtį $f(x) = 0$ keičiame ekvivalenčia lygtimi $g(x) = h(x)$, po to braižome funkcijų $y = g(x)$ ir $y = h(x)$ grafikus (kai tai padaryti paprasčiau, negu nubraižyti funkcijos $y = f(x)$ grafiką) ir randame nubraižytųjų grafikų susikirtimo taškų absceses.

Pavyzdžiui, lygtį $x^3 - 3x + 1 = 0$ galima pakeisti lygtimi $x^3 = 3x - 1$, po to nubraižyti funkcijų $y = x^3$ ir $y = 3x - 1$ grafikus ir rasti jų susikirtimo taškų absceses.

1. p a v y z d y s. Grafiškai išspręskime lygtį $x^2 - x - 2 = 0$.

S p r e n d i m a s. Lygtį užrašykime taip:

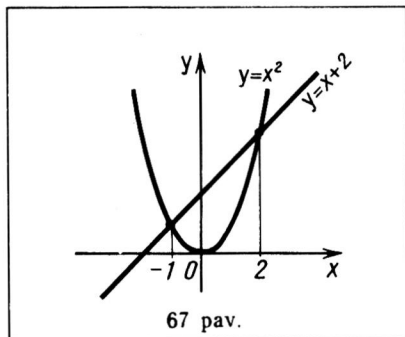
$$x^2 = x + 2.$$

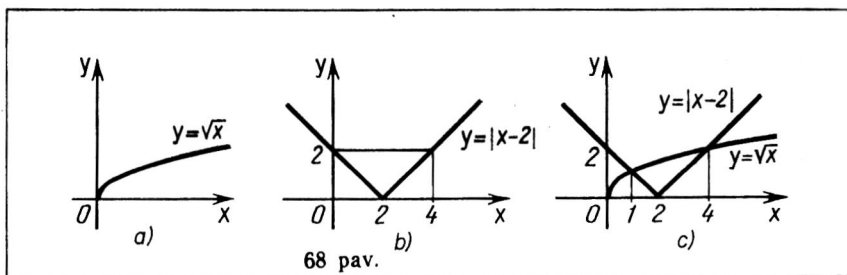
Dabar užtenka rasti funkcijų $y = x^2$ ir $y = x + 2$ grafikų susikirtimo taškų absceses.

Vienoje koordinatinių sistemoje nubraižysime funkcijų $y = x^2$ ir $y = x + 2$ grafikus (67 pav.). Randame tų grafikų susikirtimo taškų A ir B absceses: $x_A = -1$, $x_B = 2$. Vadinas, duotoji lygtis turi dvi šaknis: -1 ; 2 .

2 p a v y z d y s. Išspręskime lygtį $\sqrt{x} = |x - 2|$.

S p r e n d i m a s. Vienoje koordinatinių sistemoje nubraižysime funkcijų $y = \sqrt{x}$ ir $y = |x - 2|$ grafikus. Funkcijos $y = \sqrt{x}$ grafikas pavaizduotas 68a paveiksle. Braižydami funkcijos $y = |x - 2|$ grafiką, nagrinėkime du atvejus: kai $x \geq 2$, tai





$x-2 \geq 0$, todėl $|x-2| = x-2$; kai $x < 2$, tai $x-2 < 0$, todėl $|x-2| = 2-x$. Vadinasi,

$$y = |x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{kai } x \geq 2, \\ 2-x, & \text{kai } x < 2. \end{cases}$$

Sios funkcijos grafikas pavaizduotas 68b paveiksle. 68c paveiksle abu grafikai pavaizduoti vienoje koordinatinių sistemoje. Jie susikerta dviejuose taškuose, kurių abscisės yra $x_1=1$, $x_2=4$. Tai dvi duotosios lygties šaknys.

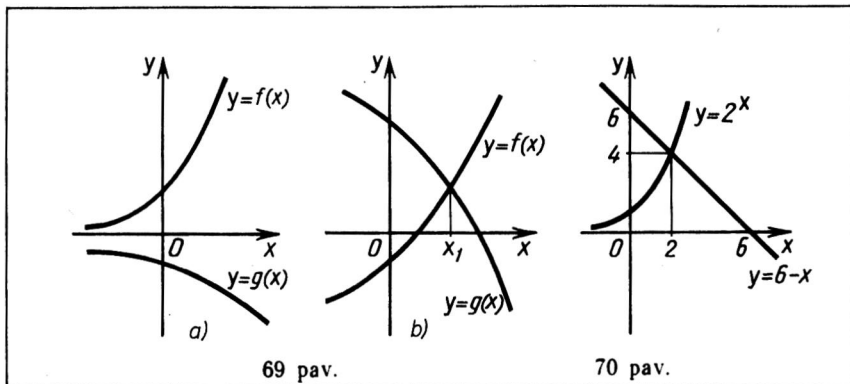
Su lygties $f(x)=g(x)$ grafiniu sprendimo metodu susijęs *funkcinis* lygties sprendimo *metodas*. Jis remiasi tuo, kad kai viena iš funkcijų $y=f(x)$ ir $y=g(x)$ didėja, o kita mažėja, tai lygtis $f(x)=g(x)$ arba neturi šaknų (69a pav.), arba turi vienintelę šaknį (69b pav.).

3 pavyzdys. Išspręskime lygtį $2^x = 6-x$.

Sprendimas. Nesunku pastebėti, kad $x=2$ — lygties šaknis. Kadangi funkcija $y=2^x$ didėja, o funkcija $y=6-x$ mažėja, tai ši lygtis daugiau šaknų neturi (70 pav.).

114. Lygtys su parametru. Sakykime, kad duota lygybė su kintamaisiais x , a :

$$f(x; a) = 0.$$





Kai keliamas uždavinys išspręsti šią lygtį x atžvilgiu kiekvienai realiajai a reikšmei, tai lygtį $f(x; a) = 0$ vadiname lygtimi su kintamuoju x ir *parametru* a .

Išspręsti lygtį su parametru a — reiškia kiekvienai a reikšmei rasti x reikšmes, tenkinančias šią lygtį.

1 p a v y z d y s. Išspręskime lygtį

$$2a(a-2)x = a-2.$$

S p r e n d i m a s. Iš pradžių nagrinėkime tas parametro reikšmes, su kuriomis virsta nuliu x koeficientas (su šiomis parametro reikšmėmis negalima abiejų lygties pusių dalyti iš x koeficiento, o su kitomis tai įmanoma). Tokios reikšmės yra $a=0$, $a=2$. Kai $a=0$, lygtis tampa $0 \cdot x = -2$. Ši lygtis neturi šaknų. Kai $a=2$, lygtis tampa $0 \cdot x = 0$, ir jos šaknimi yra kiekvienas realusis skaičius. Kai $a \neq 0$ ir $a \neq 2$, lygtį galima pertvarkyti į $x = \frac{a-2}{2a(a-2)}$.

Randame $x = \frac{1}{2a}$.

Vadinasi, kai $a=0$, lygtis neturi šaknų; kai $a=2$, šaknis — kiekvienas realusis skaičius; kai $a \neq 0$ ir $a \neq 2$, tai $x = \frac{1}{2a}$.

2 p a v y z d y s. Išspręskime lygtį

$$(a-1)x^2 + 2(2a+1)x + 4a+3 = 0.$$

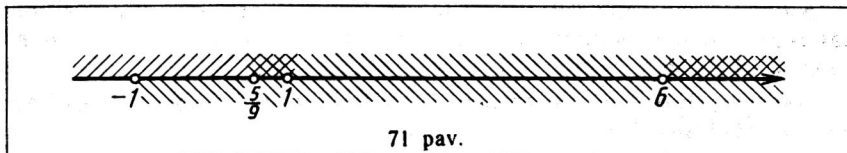
S p r e n d i m a s. Išskirkime parametro reikšmę $a=1$: kai $a=1$, tai mūsų lygtis nėra kvadratinė, o kai $a \neq 1$, — kvadratinė. Todėl kiekvienu atveju jas spręsti reikės savaip. Kai $a=1$, duotoji lygtis virsta lygtimi $6x+7=0$, ir $x = -\frac{7}{6}$. Kai $a \neq 1$, išskirkime tas parametro reikšmes, su kuriomis lygties diskriminantas virsta nuliu. Kadangi $D=5a+4$, tai $a = -\frac{4}{5}$ yra ta parametro reikšmė, į kurią reikia atkreipti dėmesį.

Kai $a < -\frac{4}{5}$, tai $D < 0$, ir lygtis neturi šaknų; kai $a \geq -\frac{4}{5}$ ir $a \neq 1$ tai $D \geq 0$, ir

$$x = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}.$$

Vadinasi, kai $a < -\frac{4}{5}$, tai nėra šaknų; kai $a=1$, tai $x = -\frac{7}{6}$; kai $a \geq -\frac{4}{5}$ ir $a \neq 1$, tai

$$x = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}.$$



3 pavyzdys. Su kuriomis parametro a reikšmėmis lygtis

$$x^2 + 2(a+1)x + 9a - 5 = 0$$

turi dvi skirtingas neigiamąsias šaknis?

Sprendimas. Lygtis turi dvi skirtingas šaknis x_1 ir x_2 , kai jos diskriminantas teigiamas. Kadangi $D = 4(a+1)^2 - 4(9a-5) = 4a^2 - 28a + 24 = 4(a-1)(a-6)$, tai turi būti teisinga nelygybė $4(a-1)(a-6) > 0$.

Remiantis Vieto teorema,

$$x_1 + x_2 = -2(a+1),$$

$$x_1 x_2 = 9a - 5.$$

Iš sąlygos žinome, kad $x_1 < 0$ ir $x_2 < 0$, todėl $-2(a+1) < 0$ ir $9a - 5 > 0$. Vadinasi, gauname nelygybių sistemą. (žr. 127 skyrelį):

$$\begin{cases} 4(a-1)(a-6) > 0, \\ -2(a+1) < 0, \\ 9a - 5 > 0. \end{cases}$$

Iš sistemos pirmos nelygybės randame (žr. 129 ir 130 skyrelį) $a < 1$ ir $a > 6$; iš antros $a > -1$; iš trečios $a > \frac{5}{9}$. Naudodamiesi koordinačių tiese (71 pav.) randame, kad arba $\frac{5}{9} < a < 1$, arba $a > 6$.

§ 12. Lygtys su dviem kintamaisiais

115. Lygties su dviem kintamaisiais sprendinys. Nagrinėkime lygtį su dviem kintamaisiais: $f(x; y) = 0$.

Kintamųjų reikšmių porą, verčiančią lygtį su dviem kintamaisiais teisinga lygybe, vadiname *lygties sprendiniu*. Užrašant lygties su dviem kintamaisiais x ir y sprendinį, pirmoje vietoje įprasta rašyti kintamojo x reikšmę, o antroje — kintamojo y reikšmę.

Pavyzdžiui, poros $(10; 0)$, $(16; 2)$, $(-2; -4)$ yra lygties $x - 3y = 10$ sprendiniai. O štai pora $(1; 5)$ nėra lygties $x - 3y = 10$ sprendinys.

Si lygtis turi ir kitų sprendinių. Jų ieškant, patogiu vieną kintamąjį išreikšti kitu, pavyzdžiui, kintamąjį x kintamuoju y : $x =$



$=10+3y$. Pasirinkę bet kurią y reikšmę, apskaičiuojame atitinkamą x reikšmę. Pavyzdžiui, kai $y=7$, tai $x=10+3\cdot 7=31$; vadinasi, pora $(31; 7)$ yra lygties sprendinys; kai $y=-2$, tai $x=10+3\cdot (-2)=4$, vadinasi, pora $(4; -2)$ taip pat yra duotosios lygties sprendinys ir t. t.

Lygtis su dviem kintamaisiais, turinčias tuos pačius sprendinius, vadiname *ekvivalenčiomis*.

Lygtims su dviem kintamaisiais teisingos 4.1 ir 4.2 teoremos (žr. 99 skyrelį).

116. Lygties su dviem kintamaisiais grafikas. Sakykime, duota lygtis su dviem kintamaisiais $f(x; y)=0$. Kai visus jos sprendinius pavaizduojame koordinatinių plokštumos taškais, gauname tam tikrą plokštumos taškų aibę. Tą aibę vadiname *lygties $f(x; y)=0$ grafiku*.

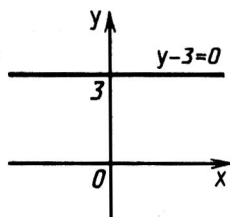
Pavyzdžiui, lygties $y-x^2=0$ grafikas yra parabolė $y=x^2$ (žr. 11 pav.); lygties $y-x=0$ grafikas yra tiesė (pirmojo ir trečiojo koordinatinio kampo pusiaukampinė, žr. 10 pav.); lygties $y-3=0$ grafikas yra tiesė, lygiagreti x ašiai (72 pav.), o lygties $x+2=0$ grafikas — tiesė, lygiagreti y ašiai (73 pav.). Lygties $\sqrt{x-1}+\sqrt{y-2}=0$ grafikas yra vienas taškas $(1; 2)$, nes tik šio taško koordinatės tinka lygčiai.

117. Tiesinė lygtis su dviem kintamaisiais ir jos grafikas. Lygtį $ax+by=c$, kurioje x, y — kintamieji, o a, b, c — skaičiai, vadiname *tiesine*; skaičius a ir b vadiname *kintamųjų koeficientais*, c — *laisvuju nariu*.

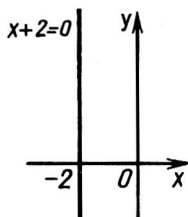
Kiekvienos tiesinės lygties $ax+by=c$, kurios bent vienas iš kintamųjų koeficientų nelygus nuliui, grafikas yra tiesė, be to, kai $b=0$, tai ta tiesė lygiagreti y ašiai, o kai $a=0$, tai tiesė lygiagreti x ašiai.

P a v y z d y s. Nubraižykime lygties $2x-3y=-6$ grafiką.

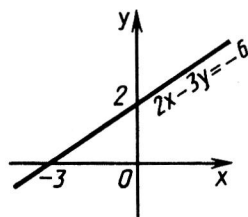
S p r e n d i m a s. Šios tiesinės lygties grafikas yra tiesė. Tiesi nubrėžti užtenka žinoti jos du taškus. Į lygtį $2x-3y=-6$ vie-



72 pav.



73 pav.



74 pav.



toj x įrašę reikšmę 0, gauname $-3y = -6$, iš čia $y = 2$. Į tą pačią lygtį vietoj y įrašę reikšmę 0, gauname $2x = -6$, iš čia $x = -3$.

Taigi radome du grafiko taškus $(0; 2)$ ir $(-3; 0)$. Nubrėžę per juos tiesę, gauname lygties $2x - 3y = -6$ grafiką (74 pav.).

Kai tiesinės lygties abu kintamųjų koeficientai lygūs nuliui, t. y. lygtis yra $0 \cdot x + 0 \cdot y = c$, galimi du atvejai:

1) $c = 0$; tada lygtis tinka kiekviena pora $(x; y)$, todėl lygties grafikas yra visa koordinačių plokštuma;

2) $c \neq 0$; tada lygtis neturi sprendinių, todėl jos grafikui nepriklauso nė vienas taškas.

§ 13. Lygčių sistemos

118. Dviejų lygčių su dviem kintamaisiais sistemos. Ekvivalenčiosios sistemos. Sakykime, duotos dvi lygtys su dviem kintamaisiais $f(x; y) = 0$ ir $g(x; y) = 0$. Kai keliamas uždavinys rasti visus bendrus dviejų lygčių su dviem kintamaisiais sprendinius, tai sakome, kad reikia išspręsti *lygčių sistemą*. Kiekvieną kintamųjų reikšmių porą, su kuria kiekviena sistemos lygtis virsta teisinga lygybe, vadiname *lygčių sistemos sprendiniu*. Išspręsti sistemą — reiškia rasti visus jos sprendinius arba įrodyti, kad jų nėra.

Sistemą sudarančias lygtis jungiame riestiniu skliaustu. Pavyzdžiui, užrašas

$$\begin{cases} x - 3y = 10, \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$$

reiškia, kad lygtys $x - 3y = 10$ ir $3x - 2y = 2$ sudaro sistemą.

Dvi lygčių sistemas, turinčias tuos pačius sprendinius, vadiname *ekvivalenčiomis*. Skyrium imant, kai abi sistemos neturi sprendinių, jas taip pat laikome ekvivalenčiomis. Spręsdami lygčių sistemą ją keičiame kita, paprastesne arba dėl kurių nors sumetimų „patogesne“ sistema, bet ekvivalenčia pradinei. Tokį keitimą pateisina šios dvi teoremos.

4.5 t. | Jei dviejų lygčių su dviem kintamaisiais sistemos vieną lygtį paliekame nepakeitę, o kitą sistemos lygtį pakeičiame jai ekvivalenčia lygtimi, tai gautoji sistema ekvivalenti pradinei.

Pavyzdžiui, sistemos

$$\begin{cases} x - 3y = 10, \\ 3x - 2y = 2 \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} x = 3y + 10, \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$$

ekvivalenčios.



Išvada. Kai sistemos kiekvieną lygtį pakeičiame ekvivalenčia lygtimi, gauname sistemą, ekvivalenčią pradinę.

Pavyzdžiui, ekvivalenčios šios sistemos:

$$\begin{cases} x-3y=10, \\ 3x-2y=2 \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} x=3y+10, \\ x=\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}. \end{cases}$$

4.6 t. Jei dviejų lygčių su dviem kintamaisiais vienos lygties nekeičiame, o kitą lygtį pakeičiame sistemos lygčių suma arba skirtumu, tai gautoji sistema ekvivalenti pradinę.

Pavyzdžiui, sistemos

$$\begin{cases} x-3y=10, \\ 3x-2y=2 \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} (x-3y)+(3x-2y)=10+2, \\ 3x-2y=2 \end{cases}$$

ekvivalenčios: lygtį $x-3y=10$ pakeitėme pradinės sistemos lygčių suma, o lygtį $3x-2y=2$ palikome nepakeitę.

119. Dviejų lygčių su dviem kintamaisiais sistemos sprendimas keitimo būdu. Keitimo metodas yra toks.

1) Vieną iš sistemos lygčių pertvarkome taip, kad y būtų išreikštas kintamuoju x (arba x — kintamuoju y).

2) Gautą išraišką įrašome vietoj y (arba vietoj x) į kitą lygtį, ir gauname lygtį su vienu kintamuoju.

3) Randame tos lygties šaknis.

4) Remdamiesi y išraiška (arba x išraiška) randame atitinkamas x (arba y) reikšmes.

P a v y z d y s. Išspręskime lygčių sistemą

$$\begin{cases} x-3y=10, \\ x^2-24y=100. \end{cases}$$

S p r e n d i m a s. Iš pirmos lygties išsireiškiame x : $x=3y+10$. Išraišką $3y+10$ įrašykime vietoj x į antrą sistemos lygtį. Gausime $(3y+10)^2-24y=100$, iš čia randame $y_1=0$, $y_2=-4$. Atitinkamas x reikšmes randame iš lygties $x=3y+10$. Kai $y=0$, tai $x=10$; kai $y=-4$, tai $x=-2$. Vadinasi, sistema turi du sprendinius: $(-2; -4)$ ir $(10; 0)$.

120. Dviejų lygčių su dviem kintamaisiais sistemos sprendimas sudėties metodu. Sudėties metodas remiasi 4.5 ir 4.6 teoremais (118 skyrelis). Jo esmę paaiškinsime pavyzdžiais.

1 p a v y z d y s. Išspręskime lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x+3y=7, \\ 3x-y=16. \end{cases} \quad (1)$$



S p r e n d i m a s. Padauginę abi antros lygties puses iš 3, gauname sistemą

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 9x - 3y = 48. \end{cases} \quad (2)$$

Remiantis 4.5 teorema, ji ekvivalenti pradinei.

Dabar sudėkime gautosios sistemos abi lygtis. Remiantis 4.6 teorema, sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ (2x + 3y) + (9x - 3y) = 7 + 48 \end{cases} \quad (3)$$

yra ekvivalenti (2) sistemai. (3) sistemą savo ruožtu pertvarkome į sistemą

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 11x = 55. \end{cases}$$

Iš lygties $11x = 55$ randame $x = 5$. Įrašę šią reikšmę į lygtį $2x + 3y = 7$, randame $y = -1$.

Vadinasi, (5; -1) yra (3) sistemos, taigi ir jai ekvivalenčios (1) sistemos sprendinys.

2 p a v y z d y s. Išspręskime lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + y = 0, \\ 2x^2 + 2y^2 + x - 3y - 5 = 0. \end{cases}$$

S p r e n d i m a s. Sistemos pirmos lygties abi puses padauginame iš 2 ir gautą lygtį atimkime iš sistemos antros lygties. Tada nariai su kintamųjų antraisiais laipsniais išnyksta:

$$(2x^2 + 2y^2 + x - 3y - 5) - (2x^2 + 2y^2 - 4x + 2y) = 0,$$

$$5x - 5y - 5 = 0,$$

$$x - y - 1 = 0.$$

Gauname paprastesnę sistemą

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + y = 0, \\ x - y - 1 = 0, \end{cases}$$

kurią nesunku išspręsti keitimo būdu. Kadangi $y = x - 1$, tai

$$x^2 + (x - 1)^2 - 2x + (x - 1) = 0,$$

$$2x^2 - 3x = 0,$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1,5.$$



Kai $x=0$, tai $y=x-1=0-1=-1$; kai $x=1,5$, tai $y=x-1=1,5-1=0,5$.

Atsakymas. $(0; -1)$ ir $(1,5; 0,5)$.

121. Dviejų lygčių su dviem kintamaisiais sistemos sprendimas įvedant naujus kintamuosius. *Naujų kintamųjų įvedimo metodas* sprendžiant dviejų lygčių su dviem kintamaisiais sistemas taikomas dvejopai: 1) įvedamas naujas kintamasis tik vienai sistemos lygčiai; 2) įvedami du nauji kintamieji iš karto abiem sistemos lygtims.

1 pavyzdys. Išspręskime sistemą

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6}, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Sprendimas. Pažymėkime $\frac{x}{y} = z$, tada $\frac{y}{x} = \frac{1}{z}$, ir sistemos pirmą lygtį virsta lygtimi $z + \frac{1}{z} = \frac{13}{6}$. Sprendžiame gautą lygtį kintamojo z atžvilgiu:

$$6z^2 - 13z + 6 = 0,$$

$$z_1 = \frac{2}{3}, \quad z_2 = \frac{3}{2}.$$

Todėl arba $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$, t.y. $y = \frac{3x}{2}$, arba $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$, t.y. $y = \frac{2x}{3}$.

Taigi pradinės sistemos pirmą lygtį suskilo į dvi lygtis: $y = \frac{3x}{2}$ ir $y = \frac{2x}{3}$. Atitinkamai dabar mums reikia išspręsti dvi sistemas:

$$\begin{cases} y = \frac{3x}{2}, \\ x + y = 5 \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} y = \frac{2x}{3}, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Iš pirmos sistemos randame $x=2$, $y=3$, iš antros — $x=3$, $y=2$.

Atsakymas. $(2; 3)$ ir $(3; 2)$.

2 pavyzdys. Išspręskime lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 32, \\ xy + 2(x + y) = 26. \end{cases}$$

Sprendimas. Pažymėkime $x+y=u$, $xy=v$. Tada $x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$, sistema virsta tokia:

$$\begin{cases} u^2 - 2v + u = 32, \\ v + 2u = 26. \end{cases} \quad (1)$$



Gautą sistemą galima spręsti keitimo būdu. Iš antros lygties v išreiškiame kintamuoju u : $v=26-2u$. Rezultatą įrašome į pirmąją lygtį:

$$u^2 + 5u - 84 = 0, \\ u_1 = -12, \quad u_2 = 7.$$

Atitinkamai randame $v_1=50$, $v_2=12$.

Radome du (1) sistemos sprendinius:

$$\begin{cases} u_1 = -12, \\ v_1 = 50 \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} u_2 = 7, \\ v_2 = 12. \end{cases}$$

Griję prie pradinių kintamųjų, gauname dvi sistemas:

$$\begin{cases} x+y = -12, \\ xy = 50 \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} x+y = 7, \\ xy = 12. \end{cases}$$

Kiekvieną jų nesunku išspręsti keitimo būdu (pavyzdžiui, išreikšus iš pirmos lygties y kintamuoju x). Pirmą sistemą neturi sprendinių, o antra turi du sprendinius: (3; 4) ir (4; 3). Tai ir yra pradinės sistemos sprendiniai.

122. Grafinis dviejų lygčių su dviem kintamaisiais sistemos sprendimas. Norint grafiškai išspręsti dviejų lygčių su dviem kintamaisiais sistemą, reikia vienoje koordinačių sistemoje nubraižyti lygčių grafikus ir rasti tų grafikų susikirtimo taškų koordinatas.

1 p a v y z d y s. Grafiškai išspręskime tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ 2x - y = 8. \end{cases}$$

S p r e n d i m a s. Brėžiame lygties $3x+2y=5$ grafiką per du taškus, pavyzdžiui, (1; 1) ir (3; -2) (75 pav.).

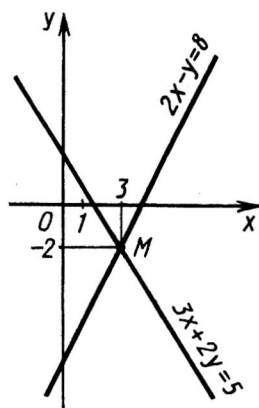
Brėžiame lygties $2x-y=8$ grafiką per taškus (0; -8) ir (4; 0) (75 pav.).

Nubrėžtosios tiesės nelygiagrečios, jos susikerta taške $M(3; -2)$. Vadinasi, (3; -2) — duotosios sistemos sprendinys.

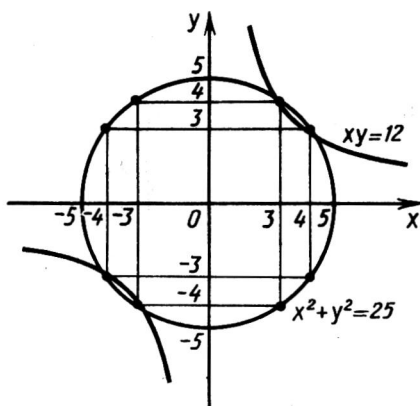
2 p a v y z d y s. Grafiškai išspręskime lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$$

S p r e n d i m a s. Lygties $x^2+y^2=25$ grafikas yra apskritimas, kurio centras yra koordinačių pradžia, o spindulys lygus 5. Lygties $xy=12$ grafikas yra hiperbolė $y=\frac{12}{x}$ (žr. 74 skyrelį). Nubraižę grafikus vienoje koordinačių sistemoje (76 pav.), randame aps-



75 pav.



76 pav.

kritimo ir hiperbolės susikirtimo taškų A, B, C, D koordinatės: $A(4; 3)$, $B(3; 4)$, $C(-4; -3)$, $D(-3; -4)$. Vadinasi, sistemos sprendiniai yra

$$(4; 3), (3; 4), (-4; -3), (-3; -4).$$

123. Dviejų tiesinių lygčių su dviem kintamaisiais sistemos tyrimas. Sakykime, duotos dvi tiesinės lygtys su dviem kintamaisiais ir visi kintamųjų koeficientai nelygūs nuliui:

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad \text{ir} \quad a_2x + b_2y = c_2.$$

Kiekvienos iš šių tiesinių lygčių grafikas yra tiesė (žr. 117 skyrelį). Kai $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, tai jos tiesės susikerta viename taške; kai $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, tai tiesės sutampa; kai $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, tai tiesės lygiagrečios ir nesutampa.

Iš to išplaukia, kad *dviejų tiesinių lygčių su dviem kintamaisiais sistema*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

turi vienintelį sprendinį, kai $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$,

turi be galo daug sprendinių, kai $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$,

neturi sprendinių, kai $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.



Pavyzdžiui, sistema

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3 = 0, \\ 3x + 4y - 7 = 0 \end{cases}$$

turi vieną sprendinį, nes $\frac{5}{3} \neq \frac{2}{4}$. Sistema

$$\begin{cases} 2x - 4y + 1 = 0, \\ 4x - 8y + 3 = 0 \end{cases}$$

neturi sprendinių, nes $\frac{2}{4} = \frac{-4}{-8} \neq \frac{1}{3}$. Sistema

$$\begin{cases} 3x - y - 4 = 0, \\ -9x + 3y + 12 = 0 \end{cases}$$

turi be galo daug sprendinių, nes

$$\frac{3}{-9} = \frac{-1}{3} = \frac{-4}{12}.$$

124. Uždavinių sprendimas sudarant lygčių sistemas.

1 uždavinys. Iš dviejų vietovių, tarp kurių atstumas 30 km, vienas priešais kitą eina du pėstieji. Jeigu pirmasis išeitų 2 h anksčiau už antrą, tai jie susitiktų po 2,5 h nuo antro pėsčiojo išėjimo, o jeigu antras išeitų 2 h anksčiau už pirmąjį, tai jie susitiktų po 3 h nuo pirmo pėsčiojo išėjimo. Koks kiekvieno pėsčiojo greitis?

Sprendimas. Pirmo pėsčiojo greitį pažymėkime x kilometrų per valandą, o antro — y kilometrų per valandą. Jeigu pirmas išeitų 2 h anksčiau už antrą, tai pagal sąlygą iki susitikimo jie eitų 4,5 h, o antras — 2,5 h. Per 4,5 h pirmas nueitų $4,5x$ km, o antras per 2,5 h nueitų $2,5y$ km. Kai jie susitiks, abu bus nuėję visą atstumą, t. y. $4,5x + 2,5y = 30$. Tai pirmą lygtį.

Jeigu antras išeitų 2 h anksčiau už pirmą, tai pagal sąlygą jis iki susitikimo eitų 5 h, o pirmas — 3 h. Samprotaudami kaip ir anksčiau, sudarome antrą lygtį: $3x + 5y = 30$.

Taigi gavome lygčių sistemą

$$\begin{cases} 4,5x + 2,5y = 30, \\ 3x + 5y = 30. \end{cases}$$

Išspręskime ją. Padauginkime abi pirmos lygties puses iš 2 ir iš gautos lygties atimkime antrą sistemos lygtį. Gauname $6x = 30$, iš čia $x = 5$. Rastąją x reikšmę įrašę į antrą sistemos lygtį, gauname $y = 3$.

Atsakymas. Pirmo pėsčiojo greitis yra 5 km/h, antro — 3 km/h.



2 uždavinys. Taupomoji kasa po metų indėlininkui priskaičiavo 6 rub. palūkanų. Indėlininkas pridėjo 44 rub. ir paliko pinigus dar metams. Po metų, kai vėl jam priskaičiavo palūkanas, indėlis sudarė 257,5 rub. Kokia suma buvo padėta į taupomąją kasą iš pradžių ir kiek procentų priskaičiuoja taupomoji kasa?

Sprendimas. Sakykime, pradinis indėlis x rub., o taupomoji kasa po metų priskaičiuoja $y\%$. Tada į metų pabaigą prie pradinio indėlio prisidės $\frac{y}{100} \cdot x$ rub. Remdamiesi sąlyga, sudarome lygtį $\frac{yx}{100} = 6$.

Metų pabaigoje indėlininkas padėjo į taupomąją kasą dar 44 rub., taigi jo indėlis antrųjų metų pradžioje sudarė $x+6+44$, t. y. $(x+50)$ rub. Suma, kuri susidarė antrųjų metų gale, priskaičiavus palūkanas, buvo $x+50+\frac{y}{100}(x+50)$ rub. Iš sąlygos žinome, kad ji lygi 257,5 rub. Todėl galime sudaryti antrą lygtį:

$$x+50+\frac{y}{100}(x+50)=257,5.$$

Taigi gavome tokią dviejų lygčių su dviem kintamaisiais sistemą:

$$\begin{cases} \frac{yx}{100} = 6, \\ x+50+\frac{y}{100}(x+50)=257,5. \end{cases}$$

Pertvarkę abi lygtis, turime:

$$\begin{cases} xy = 600, \\ 100x + 50y + xy = 20750. \end{cases}$$

Antrą sistemos lygtį pakeičiame antros ir pirmos lygties skirtumu:

$$\begin{cases} xy = 600, \\ 100x + 50y = 20150. \end{cases}$$

Šią sistemą galima spręsti keitimo būdu. Iš antros lygties randame $y=403-2x$. Įrašę $403-2x$ įrašę vietoj y į pirmą sistemos lygtį, gauname $x(403-2x)=600$; iš čia randame dvi šaknis 200 ir 1,5. Aišku, kad tinka tik pirmą reikšmę.

Į lygtį $y=403-2x$ vietoj x įrašę rastąją reikšmę 200, gauname $y=3$. Vadinasi, pradinis indėlis buvo 200 rub., o taupomoji kasa per metus priskaičiuoja 3%.



V SKYRIUS. NELYGYBĖS

§ 14. Nelygybių su kintamuoju sprendimas

125. Pagrindinės sąvokos, susijusios su vieno kintamojo nelygybių sprendimu. Sakykime, duota nelygybė $f(x) > g(x)$. Kiekvieną kintamojo reikšmę, su kuria nelygybė su kintamuoju virsta teisinga skaitine nelygybe, vadiname *nelygybės sprendiniu*. Išspręsti nelygybę su kintamuoju — reiškia rasti visus jos sprendinius arba įrodyti, kad jų nėra.

Dvi nelygybes su vienu kintamuoju, kurių sprendiniai sutampa, vadiname *ekvivalenčiomis*, skyrium imant, nelygybės ekvivalenčios, kai abi jos neturi sprendinių.

Spręsdami nelygybę dažniausiai ją keičiame kita, paprastesne, bet jai ekvivalenčia; gautą nelygybę vėl keičiame paprastesne, ekvivalenčia jai ir t. t. Taip keisti galima remiantis tokiais teiginiais.

5.1 t. | Jeigu iš vienos nelygybės pusės dėmenį perkelsime į kitą pusę su priešingu ženklu, tai gausime nelygybę, ekvivalenčią duotajai.

5.2 t. | Jei nelygybės su vienu kintamuoju abi pusės padauginsime arba padalysime iš to paties teigiamąjo skaičiaus, tai gausime nelygybę, ekvivalenčią duotajai.

5.3 t. | Jei nelygybės su vienu kintamuoju abi pusės padauginsime ar padalysime iš to paties neigiamąjo skaičiaus, ir nelygybės ženklą pakeisime priešingu, tai gausime nelygybę, ekvivalenčią duotajai.

Pavyzdžiui, nelygybės $x^2 + 5x < 6$ ir $x^2 + 5x - 6 < 0$ ekvivalenčios, remiantis 5.1 teorema. Nelygybės $3x^2 + 6x < 9$ ir $x^2 + 2x < 3$ ekvivalenčios remiantis 5.3 teorema (abi pirmosios nelygybės pusės padalijome iš teigiamąjo skaičiaus 3, o pradinės nelygybės ženklą $<$ palikome nepakeistą). Nelygybės $-6x < 12$ ir $x > -2$ ekvivalenčios, remiantis 5.3 teorema (abi nelygybės $-6x < 12$ pusės padalijome iš neigiamąjo skaičiaus -6 , ir pradinės nelygybės ženklą $<$ pakeitėme ženklu $>$).

Kartais praverčia šios teoremos, apibendrinančios 5.2 ir 5.3 teoremas.

5.4 t. | Jei abi nelygybės pusės padauginsime arba padalysime iš to paties reiškinio, kuris su visomis kintamojo reikšmėmis įgyja teigiamąsias reikšmes, tai gausime nelygybę, ekvivalenčią duotajai.



- 5.5 t. | Jei abi nelygybės pusės padauginsime arba padalysime iš to paties reiškinių, su visomis kintamojo reikšmėmis įgyjančio neigiamąsias reikšmes, ir nelygybės ženklą pakeisime priešingu, tai gausime nelygybę, ekvivalenčią duotajai.

126. Tiesinės nelygybės su vienu kintamuoju. *Tiesinė nelygybė* vadiname nelygybę $ax > b$ (atitinkamai $ax < b$, $ax \geq b$, $ax \leq b$). Kai $a > 0$, tai nelygybė $ax > b$ ekvivalenti nelygybei $x > \frac{b}{a}$ (žr. 5.2 teorema), todėl jos sprendinių aibė yra intervalas $(\frac{b}{a}; +\infty)$. Kai $a < 0$, tai nelygybė $ax > b$ ekvivalenti nelygybei $x < \frac{b}{a}$ (žr. 5.3 teorema), todėl jos sprendinių aibė yra intervalas $(-\infty; \frac{b}{a})$. Kai $a = 0$, tai nelygybė virsta tokia: $0 \cdot x > b$. Ji neturi sprendinių, kai $b \geq 0$, ir teisinga su visais x , kai $b < 0$.

Daugelis nelygybių, jas pertvarkius, pakeičiamos tiesinėmis.
P a v y z d y s. Išspręskime nelygybę

$$2(x-3) + 5(1-x) \geq 3(2x-5).$$

S p r e n d i m a s. Atskliaudžiame:

$$\begin{aligned} 2x - 6 + 5 - 5x &\geq 6x - 15, \\ -3x - 1 &\geq 6x - 15. \end{aligned}$$

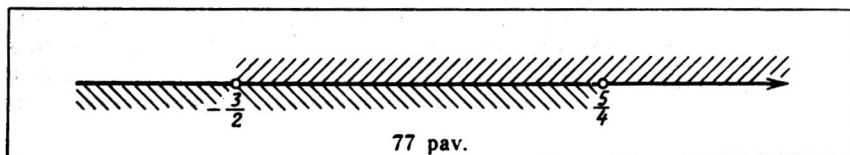
Toliau,

$$\begin{aligned} -3x - 6x &\geq -15 + 1, \\ -9x &\geq -14. \end{aligned} \tag{1}$$

Remiantis 5.1 teorema, ši nelygybė ekvivalenti duotajai. Dabar padalykime abi (1) nelygybės pusės iš neigiamojo skaičiaus -9 ir pakeiskime nelygybės ženklą. Remdamiesi 5.3 teorema, gauname (1) nelygybei ekvivalenčią: $x \leq \frac{14}{9}$. Todėl duotosios nelygybės sprendinių aibė yra intervalas $(-\infty; \frac{14}{9}]$.

127. Nelygybių su vienu kintamuoju sistemos. Sakome, kad kelios nelygybės su vienu kintamuoju sudaro *sistemą*, kai reikia rasti tų nelygybių visus bendrus sprendinius.

Kintamojo reikšmę, su kuria kiekviena sistemos nelygybė virsta teisinga skaitine nelygybe, vadiname *nelygybių sistemos sprendiniu*.



Sistemą sudarančias nelygybes jungiame riestiniu skliaustu. Pavyzdžiui, užrašas

$$\begin{cases} 2x-1 > 3, \\ 3x-2 < 11 \end{cases}$$

reiškia, kad nelygybės $2x-1 > 3$ ir $3x-2 < 11$ sudaro sistemą.

Kartais rašome dvigubą nelygybę. Pavyzdžiui, nelygybių sistemą $\begin{cases} 2x+1 > 1, \\ 2x+1 < 5 \end{cases}$ galima užrašyti dviguba nelygybe $1 < 2x+1 < 5$.

1 p a v y z d y s. Išspręskime nelygybių sistemą

$$\begin{cases} 5x+2 > 3x-1, \\ 3x+1 > 7x-4. \end{cases}$$

S p r e n d i m a s. Pirmą sistemos nelygybę pertvarkome į ekvivalenčią nelygybę $x > -\frac{3}{2}$, o antrą — į nelygybę $x < \frac{5}{4}$. Taigi reikia išspręsti sistemą

$$\begin{cases} x > -\frac{3}{2}, \\ x < \frac{5}{4}. \end{cases}$$

Naudodamiesi koordinačių tiese (77 pav.), randame sistemos sprendinių aibę. Tai intervalas $\left(-\frac{3}{2}; \frac{5}{4}\right)$.

2 p a v y z d y s. Išspręskime nelygybių sistemą

$$\begin{cases} 3(x+1) - \frac{x-2}{4} < 5x-7 \cdot \frac{x+3}{2}, \\ 2x - \frac{x}{3} + 6 \leq 4x-3. \end{cases}$$

S p r e n d i m a s. Pertvarkę kiekvieną sistemos nelygybę atskirai, gauname:

$$\begin{cases} x < -\frac{56}{5}, \\ x \geq \frac{27}{7}. \end{cases}$$



Tokių x reikšmių, kurios vienu metu tenkintų nelygybes $x < -\frac{56}{5}$ ir $x \geq \frac{27}{7}$, nėra, todėl duotoji nelygybių sistema neturi sprendinių.

128. Tiesiškai trūpmeninės nelygybės. Išnagrinėsime keletą tokių nelygybių sprendimo pavyzdžių.

1 p a v y z d y s. Išspręskime nelygybę $\frac{2x+1}{3x-2} > 0$.

S p r e n d i m a s. Trupmena teigiama, kai jos skaitiklis ir vardiklis turi tą patį ženklą, t. y. kai jie abu teigiami arba abu neigiami. Taigi gauname dvi nelygybių sistemas:

$$\begin{cases} 2x+1 > 0, \\ 3x-2 > 0 \end{cases} \quad \text{arba} \quad \begin{cases} 2x+1 < 0, \\ 3x-2 < 0. \end{cases}$$

Iš pirmosios randame $\begin{cases} x > -\frac{1}{2}, \\ x > \frac{2}{3}, \end{cases}$ t.y. $x > \frac{2}{3}$.

Iš antrosios $\begin{cases} x < -\frac{1}{2}, \\ x < \frac{2}{3}, \end{cases}$ t.y. $x < -\frac{1}{2}$.

Vadinasi, radome tokius duotosios nelygybės sprendinius:

$$x < -\frac{1}{2}; \quad x > \frac{2}{3}.$$

2 p a v y z d y s. Išspręskime nelygybę $\frac{3x+7}{2x-7} \geq 5$.

S p r e n d i m a s. Nuosekliai pertvarkome: $\frac{3x+7}{2x-7} - 5 \geq 0$,

$$\frac{3x+7-10x+35}{2x-7} \geq 0,$$

$$\frac{-7x+42}{2x-7} \geq 0.$$

Padauginame abi nelygybės puses iš -1 ir pakeičiame nelygybės ženklą (žr. 125 skyrelio 5.3 teoremą):

$$\frac{7x-42}{2x-7} \leq 0.$$

Trupmena mažesnė už nulį arba lygi nuliui dviem atvejais: 1) kai skaitiklis mažesnis už nulį arba lygus nuliui, o vardiklis didesnis už nulį; 2) kai skaitiklis didesnis už nulį arba lygus nu-



liui, o vardiklis mažesnis už nulį. Taigi gauname dvi nelygybių sistemas:

$$\begin{cases} 7x - 42 \leq 0, \\ 2x - 7 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 7x - 42 \geq 0, \\ 2x - 7 < 0. \end{cases}$$

Iš pirmosios randame $\begin{cases} x \leq 6, \\ x > \frac{7}{2}, \end{cases}$

t.y. $\frac{7}{2} < x \leq 6$.

Iš antrosios $\begin{cases} x \geq 6, \\ x < \frac{7}{2}, \end{cases}$ t. y. sistema neturi sprendinių.

Vadinasi, duotosios nelygybės sprendinių aibė yra intervalas $(\frac{7}{2}; 6]$.

129. Antrojo laipsnio nelygybės. Nagrinėkime nelygybes $ax^2 + bx + c > 0$ arba $ax^2 + bx + c < 0$, kai $a \neq 0$. Jas spręsti galima taip: išskaidyti kvadratinį trinarij $ax^2 + bx + c$ dauginamaisiais remiantis formule $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ (žr. 50 skyrelį), po to nelygybės $a(x - x_1)(x - x_2) > 0$ (arba $a(x - x_1)(x - x_2) < 0$) abi puses padalyti iš skaičiaus a ir palikti nelygybės ženklą tą patį, kai $a > 0$, pakeisti priešingu, kai $a < 0$ (žr. 125 skyrelį), t. y. pereiti prie nelygybės $(x - x_1)(x - x_2) > 0$ (arba $(x - x_1)(x - x_2) < 0$). Dabar reikia tik remtis tuo, kad dviejų skaičių sandauga teigiama (neigiama), kai dauginamieji vienodų (skirtingų) ženklų.

1 pavyzdys. Išspręskime nelygybę $2x^2 + 5x + 2 > 0$.

Sprendimas. Raskime trinario $2x^2 + 5x + 2$ šaknis. Iš lygties $2x^2 + 5x + 2 = 0$ gauname $x_1 = -2$, $x_2 = -\frac{1}{2}$. Vadinasi, $2x^2 + 5x + 2 = 2(x + 2)(x + \frac{1}{2})$, ir gauname nelygybę $2(x + 2)(x + \frac{1}{2}) > 0$, arba $(x + 2)(x + \frac{1}{2}) > 0$. Reiškiniai $x + 2$ ir $x + \frac{1}{2}$ turi būti vienodų ženklų. Taigi gauname dvi nelygybių sistemas:

$$\begin{cases} x + 2 > 0, \\ x + \frac{1}{2} > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2 < 0, \\ x + \frac{1}{2} < 0. \end{cases}$$

Iš pirmosios randame $x > -\frac{1}{2}$, o iš antrosios $x < -2$.

2 pavyzdys. Išspręskime nelygybę $7x + 10 \geq 3x^2$.

Sprendimas. Pertvarkome nelygybę: $7x + 10 - 3x^2 \geq 0$. Padauginame abi puses iš -1 : $3x^2 - 7x - 10 \leq 0$. Kvadratinio trinario $3x^2 - 7x - 10$ šaknys yra $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{10}{3}$. Išskaidę trinarij daugi-



namaisiais, gauname nelygybę $3(x+1)\left(x-\frac{10}{3}\right) \leq 0$. Nuo šios nelygybės pereiname prie dviejų sistemų:

$$\begin{cases} x+1 \leq 0, \\ x-\frac{10}{3} \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x+1 \geq 0, \\ x-\frac{10}{3} \leq 0. \end{cases}$$

Pirmoji sistema neturi sprendinių, o iš antrosios randame

$$-1 \leq x \leq \frac{10}{3}.$$

3 pavyzdys. Išspręskime nelygybę $x^2-6x+9>0$.

Sprendimas. Kvadratinis trinaris x^2-6x+9 turi dvi lygias šaknis: $x_1=x_2=3$. Vadinasi, $x^2-6x+9=(x-3)^2$. Nelygybė $x^2-6x+9>0$ virsta tokia: $(x-3)^2>0$. Ši nelygybė teisinga su visais x , išskyrus $x=3$.

4 pavyzdys. Išspręskime nelygybę $x^2 \geq 25$.

Sprendimas. Pertvarkome: $x^2-25 \geq 0$, $(x-5)(x+5) \geq 0$, iš čia

$$\begin{cases} x-5 \geq 0, \\ x+5 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x-5 \leq 0, \\ x+5 \leq 0. \end{cases}$$

Iš pirmos sistemos randame $x \geq 5$, iš antros $x \leq -5$.

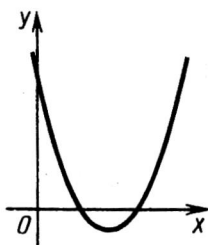
Sprendžiant antrojo laipsnio nelygybes pravartus toks teiginys.

5.6 t. | Jei kvadratinio trinario ax^2+bx+c diskriminantas $D = b^2-4ac$ neigiamas, o vyriausiasis koeficientas a teigiamas, tai su visomis x reikšmėmis teisinga nelygybė $ax^2+bx+c > 0$.

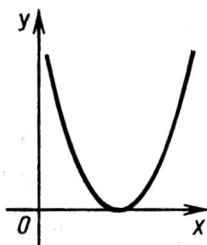
130. Antrojo laipsnio nelygybių grafinis sprendimas. Kvadratinės funkcijos $y=ax^2+bx+c$ grafikas yra parabolė, kurios šakos nukreiptos aukštyn, kai $a>0$, ir žemyn, kai $a<0$. Galimi trys atvejai: parabolė kerta x ašį (t. y. lygtis $ax^2+bx+c=0$ turi dvi skirtingas šaknis), parabolės viršūnė yra x ašyje (t. y. lygtis $ax^2+bx+c=0$ turi vieną šaknį), parabolė nekerta x ašies (t. y. lygtis $ax^2+bx+c=0$ neturi šaknų). Taigi yra galimos šešios parabolės — funkcijos $y=ax^2+bx+c$ grafiko — padėties x ašies atžvilgiu; jos pavaizduotos 78–83 paveiksluose. Remiantis šiomis grafinėmis iliustracijomis, galima spręsti kvadratinės nelygybes.

1 pavyzdys. Išspręskime nelygybę $2x^2+5x+2>0$.

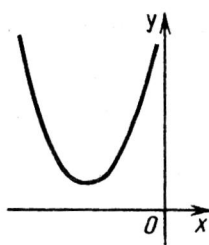
Sprendimas. Lygtis $2x^2+5x+2=0$ turi dvi šaknis: $x_1=-2$, $x_2=-\frac{1}{2}$. Parabolė — funkcijos $y=2x^2+5x+2$ grafikas — atrodo kaip tat pavaizduota 78 paveiksle. Nelygybė $2x^2+5x+2>0$ teisinga su tomis x reikšmėmis, su kuriomis parabolės taškai



78 pav.



79 pav.



80 pav.

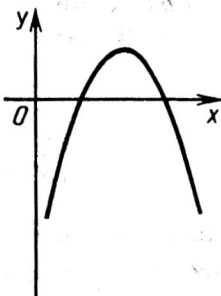
yra virš x ašies; taip yra, kai $x < x_1$ arba kai $x > x_2$, t. y. kai $x < -2$ arba kai $x > -\frac{1}{2}$. Vadinasi, nelygybės sprendiniai yra $x < -2$, $x > -\frac{1}{2}$ (žr. 129 skyrelio 1 pavyzdį).

2 p a v y z d y s. Išspręskime nelygybę $3x^2 - 7x - 10 \leq 0$.

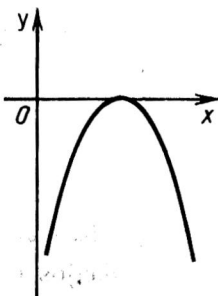
S p r e n d i m a s. Lygtis $3x^2 - 7x - 10 = 0$ turi dvi šaknis: $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{10}{3}$. Parabolė — funkcijos $y = 3x^2 - 7x - 10$ grafikas — atrodo kaip tat pavaizduota 78 paveiksle. Nelygybė $3x^2 - 7x - 10 \leq 0$ teisinga su tomis x reikšmėmis, su kuriomis parabolės taškai yra x ašyje arba po ja. Tai bus tos x reikšmės, kurios priklauso intervalui $[x_1; x_2]$. Vadinasi, nelygybės sprendinių aibė yra intervalas $\left[-1; \frac{10}{3}\right]$ (žr. 129 skyrelio 2 pavyzdį).

3 p a v y z d y s. Išspręskime nelygybę $-x^2 + 4x - 4 > 0$.

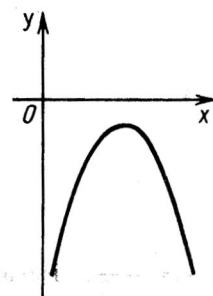
S p r e n d i m a s. Lygtis $-x^2 + 4x - 4 = 0$ turi vieną šaknį $x = 2$. Parabolė — funkcijos $y = -x^2 + 4x - 4$ grafikas — atrodo kaip



81 pav.



82 pav.



83 pav.



tat pavaizduota 82 paveiksle. Nelygybė $-x^2+4x-4>0$ teisinga su tomis x reikšmėmis, su kuriomis parabolės taškai yra virš x ašies. Tokių taškų nėra, todėl nelygybė neturi sprendinių.

4 pavyzdys. Išspręskime nelygybę $-3x^2+x-5<0$.

Sprendimas. Lygtis $-3x^2+x-5=0$ neturi šaknų. Parabolė — funkcijos $y=-3x^2+x-5$ grafikas — atrodo kaip tat pavaizduota 83 paveiksle. Nelygybė $-3x^2+x-5<0$ teisinga su tomis x reikšmėmis, su kuriomis parabolės taškai yra po x ašimi. Kadangi visa parabolė yra po x ašimi, tai nelygybė teisinga su visomis x reikšmėmis.

131. Nelygybės su moduliais. Spręsdami nelygybes, kuriose kintamųjų yra po modulio ženklu, remiamės modulio apibrėžimu:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{kai } f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{kai } f(x) < 0. \end{cases}$$

Kartais pravartu remtis realiojo skaičiaus modulio geometrine interpretacija: $|a|$ reiškia koordinačių tiesės taško a atstumą iki atskaitos pradžios O , o $|a-b|$ reiškia atstumą tarp koordinačių tiesės taškų a ir b (žr. 27 skyrelį).

Be to, galima nelygybės abi puses kelti kvadratu remiantis tolia teorema.

5.7 t. Jei reiškiniai $f(x)$ ir $g(x)$ su visomis x reikšmėmis įgyja tik neneigiamąsias reikšmes, tai nelygybės $f(x) > g(x)$ ir $(f(x))^2 > (g(x))^2$ yra ekvivalenčios.

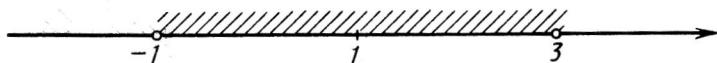
Paaiškinsime, kaip ši teorema taikoma sprendžiant nelygybes su moduliais. Sakykime, reikia išspręsti nelygybę

$$|f(x)| > |g(x)|.$$

Kadangi su visais x , priklausančiais reiškinių $f(x)$ ir $g(x)$ apibrėžimo sričiai teisingos sąsajos $|f(x)| \geq 0$, $|g(x)| \geq 0$, $(|f(x)|)^2 = (f(x))^2$ ir $(|g(x)|)^2 = (g(x))^2$, tai duotoji nelygybė ekvivalenti nelygybei $(f(x))^2 > (g(x))^2$.

1 pavyzdys. Išspręskime nelygybę $|x-1| < 2$.

Sprendimas. Pirmas būdas. $|x-1|$ galima laikyti atstumu tarp koordinačių tiesės taškų x ir 1. Vadinasi, koordinačių tiesėje reikia nurodyti visus taškus x , kurie nutolę nuo taško 1 mažiau kaip per 2 vienetus. Pasinaudoję koordinačių tiese (84



84 pav.



pav.) nustatome, kad nelygybės sprendinių aibė yra intervalas $(-1; 3)$.

An tr a s bū d a s. Pakėlę abi duotosios nelygybės puses kvadratu, gauname ekvivalenčią nelygybę $(x-1)^2 < 4$. Spręsdami pastarąją nelygybę, gauname $x^2 - 2x - 3 < 0$; iš čia $-1 < x < 3$ (žr. 129 arba 130 skyrelį).

Tre č i a s bū d a s. Remiantis skaičiaus modulio apibrėžimu,

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{kai } x-1 \geq 0, \\ -(x-1), & \text{kai } x-1 < 0. \end{cases}$$

Todėl nelygybę galima pakeisti dviem nelygybių sistemomis:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ x-1 < 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x-1 < 0, \\ -(x-1) < 2. \end{cases}$$

Iš pirmos sistemos randame $1 \leq x < 3$, iš antros $-1 < x < 1$. Sujungę šiuos sprendinius, gauname intervalą $(-1; 3)$.

2 p a v y z d y s. Išspręskime nelygybę $|2x+5| \geq 7$.

S p r e n d i m a s. Turime $|x+2,5| \geq 3,5$. Mums reikia nurodyti visus tokius koordinačių tiesės taškus x , kurie nuo taško $-2,5$ nutolę atstumu, didesniu už $3,5$ ar lygiu jam. Pasinaudoję koordinačių tiese (85 pav.), randame sprendinius: $x \leq -6$; $x \geq 1$.

3 p a v y z d y s. Išspręskime nelygybę $|2x-1| \leq |3x+1|$.

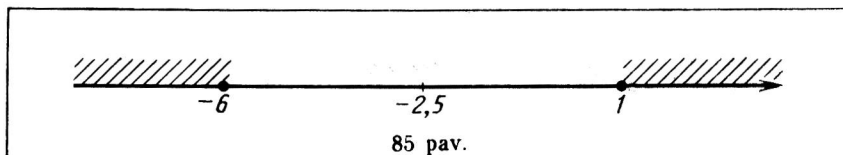
S p r e n d i m a s. Pakėlę abi nelygybės puses kvadratu, gauname nelygybę $(2x-1)^2 \leq (3x+1)^2$, ekvivalenčią duotajai. Pertvarę paskutinę nelygybę, gauname $5x^2 + 10x \geq 0$, iš čia randame: $x \leq -2$; $x \geq 0$.

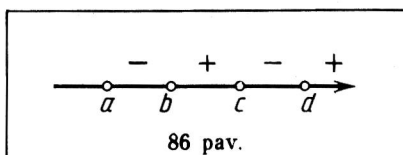
4 p a v y z d y s. Išspręskime nelygybę $|2x+4| \leq 3x+2$.

S p r e n d i m a s. Kai $2x+4 \geq 0$, tai $|2x+4| = 2x+4$, todėl nelygybė virsta nelygybe $2x+4 \leq 3x+2$. Kai $2x+4 < 0$, tai $|2x+4| = -(2x+4)$, ir nelygybė virsta tokia: $-(2x+4) \leq 3x+2$. Taigi pradinę nelygybę galima pakeisti dviem nelygybių sistemomis:

$$\begin{cases} 2x+4 \geq 0, \\ 2x+4 \leq 3x+2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+4 < 0, \\ -(2x+4) \leq 3x+2. \end{cases}$$

Iš pirmos sistemos randame $x \geq 2$, antra sistema neturi sprendinių. Vadinas, nelygybės sprendinių aibė — spindulys $[2; +\infty)$.





132. Racionaliųjų nelygybių sprendimas intervalų metodu.

Racionaliosios nelygybės $\frac{p(x)}{q(x)} > 0$ (vietoj ženklo $>$ gali būti ir bet kuris kitas nelygybės ženklas), kurių $p(x)$ ir $q(x)$

dauginariai, sprendžiamos remiantis tokiu samprotavimu.

Nagrinėkime funkciją $h(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}$, $a < b < c < d$. Kai $x > d$, tai kiekvienas iš dauginamųjų $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-d$ teigiamas, todėl intervale $(d; +\infty)$ turime $h(x) > 0$. Kai $c < x < d$, tai $x-d < 0$, o visi kiti dauginamieji, kaip ir anksčiau, teigiami. Vadinasi, intervale $(c; d)$ turime $h(x) < 0$. Analogiškai intervale $(b; c)$ bus $h(x) > 0$ ir t. t. (86 pav.).

Funkcijos $h(x)$ ženklų kitimą patogiau iliustruoti kreive (ją vadiname „ženklų kreive“), kuri brėžiama iš dešinės į kairę, pradedant nuo viršaus (87 pav.). Šią iliustraciją suprasti reikia taip: tuose intervaluose, kuriuose ta kreivė eina virš koordinačių tiesės, teisinga nelygybė $h(x) > 0$; tuose intervaluose, kuriuose kreivė eina po tiesę, turime $h(x) < 0$.

Šitame samprotavime visai nesvarbu, kiek tiesinių dauginamųjų yra skaitiklyje ir vardiklyje ir kaip koordinačių tiesėje tarpusavy išsidėsčiusios trupmenos skaitiklio ir vardiklio šaknys. Todėl taip samprotaujame ir kai turime funkciją

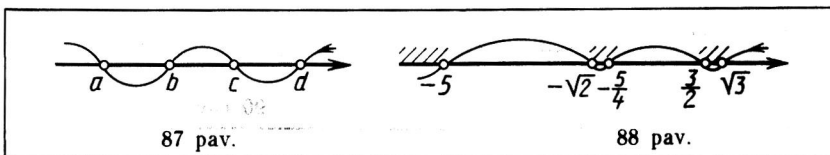
$$f(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)}{(x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_k)}, \quad (1)$$

o skaičiai $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_k$ nelygūs. Funkcijos $f(x)$ ženklų kitimą čia taip pat galime pailiustruoti ženklų kreive. Ją vėl brėžiame iš dešinės į kairę, pradedami nuo viršaus, ir vedame per visus koordinačių tiesėje pažymėtus taškus $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_k$. Tuo ir remiasi *intervalų metodas*, kuris labai patogus sprendžiant racionaliąsias nelygybes.

1 p a v y z d y s. Išspręskite nelygybę $\frac{(x+5)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2})}{(2x-3)(4x+5)} < 0$.

S p r e n d i m a s. Pertvarkykime nelygybės kairiąją pusę:

$$\frac{(x+5)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2})}{2\left(x-\frac{3}{2}\right) \cdot 4\left(x+\frac{5}{4}\right)} < 0$$





ir abi nelygybės puses padauginame iš 8; gausime nelygybę

$$\frac{(x+5)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2})}{\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{5}{4}\right)} < 0,$$

ekvivalenčią duotajai.

Funkcijos

$$f(x) = \frac{(x+5)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2})}{\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{5}{4}\right)}$$

ženklų kitimą pavaizduokime ženklų kreive (88 pav.). Tos x reikšmės, su kuriomis $f(x) < 0$ (subrūkšniuota), tenkina nelygybes:

$$x < -5; \quad -\sqrt{2} < x < -\frac{5}{4}; \quad \frac{3}{2} < x < \sqrt{3}.$$

Tai ir yra pradinės nelygybės sprendiniai.

2 pavyzdys. Išspręskime nelygybę $\frac{(x-3)(x+2)}{x^2-1} < 1$.

Sprendimas. Pertvarkome nelygybę:

$$\frac{x^2-x-6}{x^2-1} - 1 < 0, \quad \frac{x+5}{(x-1)(x+1)} > 0.$$

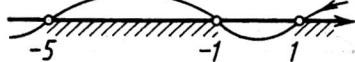
Brėžiame funkcijos $f(x) = \frac{x+5}{(x-1)(x+1)}$ ženklų kreivę (89 pav.).

Ja remdamiesi randame nelygybės sprendinius:

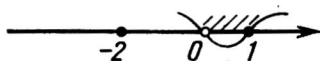
$$-5 < x < -1; \quad x > 1.$$

3 pavyzdys. Išspręskime nelygybę $\frac{(x-1)^5(x+2)^3}{x} \leq 0$.

Sprendimas. Reiškiny $(x-1)^4(x+2)^2$ virsta nulių, kai $x=1$ ir $x=-2$, o su kitomis x reikšmėmis jis teigiamas. Reikšmės $x=1$ ir $x=-2$ tenkina duotą negriežtąją nelygybę, taigi yra jos sprendiniai. Dabar sakykime, kad $x \neq 1$, $x \neq -2$, tada $(x-1)^4(x+2)^2 > 0$. Padaliję abi pradinės nelygybės puses iš $(x-1)^4(x+2)^2$ ir palikę jos ženklą, gauname nelygybę $\frac{x-1}{x} \leq 0$, ekvivalenčią pradinei (žr. 125 skyrelį). Gautos nelygybės sprendiniai yra $0 < x \leq 1$ (90 pav.). Į atsakymą reikia įjungti ir minėtą sprendinį $x=-2$.



89 pav.



90 pav.



133. Rodiklinės nelygybės. Sprendžiant tipo $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ nelygybes reikia atsiminti, kad rodiklinė funkcija $y = a^x$ didėja, kai $a > 1$, ir mažėja, kai $0 < a < 1$ (žr. 85 skyrelį). Todėl kai $a > 1$, iš nelygybės $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ gauname tos pačios prasmės nelygybę $f(x) > g(x)$. Kai $0 < a < 1$, iš nelygybės $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ gauname priešingos prasmės nelygybę $f(x) < g(x)$.

1 pavyzdys. Išspręskime nelygybę $2^{3x+7} < 2^{2x-1}$.

Sprendimas. Kadangi laipsnio pagrindas didesnis už 1, rašome tos pačios prasmės nelygybę: $3x+7 < 2x-1$. Ją išsprendę, randame $x < -8$.

2 pavyzdys. Išspręskime nelygybę $(0,04)^{5x-x^2-8} \leq 625$.

Sprendimas. Kadangi $625 = 25^2 = \left(\frac{1}{25}\right)^{-2} = (0,04)^{-2}$, tai nelygybę galima užrašyti taip:

$$(0,04)^{5x-x^2-8} \leq (0,04)^{-2}.$$

Kadangi $0 < 0,04 < 1$, tai rašome priešingos prasmės nelygybę $5x - x^2 - 8 \geq -2$. Turime:

$$5x - x^2 - 8 + 2 \geq 0,$$

$$-x^2 + 5x - 6 \geq 0,$$

$$x^2 - 5x + 6 \leq 0,$$

$$(x-2)(x-3) \leq 0.$$

Išsprendę paskutinę nelygybę (žr. 132 ar 129 skyrelį), randame $2 \leq x \leq 3$. Taigi pradinės nelygybės sprendinių aibė yra intervalas $[2; 3]$.

134. Logaritminės nelygybės. Sprendžiant tipo $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ nelygybes reikia atsiminti, kad logaritminė funkcija $y = \log_a x$ didėja, kai $a > 1$, ir mažėja, kai $0 < a < 1$ (žr. 87 skyrelį). Todėl kai $a > 1$, iš pradinės nelygybės gauname tos pačios prasmės nelygybę $f(x) > g(x)$. Kai $0 < a < 1$, tai iš pradinės nelygybės gauname priešingos prasmės nelygybę $f(x) < g(x)$. Be to, reikia atsiminti, kad logaritminė funkcija apibrėžta tik teigiamųjų skaičių aibėje. Vadinasi, turi būti teisingos nelygybės $f(x) > 0$ ir $g(x) > 0$. Vadinasi, iš nelygybės $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ gauname nelygybių sistemą

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x) \end{cases} \quad \text{arba} \quad \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Beje, pirmą sistemą galima suprastinti taip: nelygybę $f(x) > 0$ išplaukia iš nelygybių $f(x) > g(x)$, $g(x) > 0$, todėl nelygybę $f(x) > 0$ galima praleisti, t. y. sistemą parašyti taip:



$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$$

Analogiškai antrą sistemą galima parašyti taip:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

1 p a v y z d y s. Išspręskime nelygybę $\log_{\frac{1}{3}}(2x+59) > -2$.

S p r e n d i m a s. Kadangi $-2 = \log_{\frac{1}{3}} 9$, tai nelygybę galima parašyti taip:

$$\log_{\frac{1}{3}}(2x+59) > \log_{\frac{1}{3}} 9.$$

Toliau,

$$\begin{cases} 2x+59 > 0, & \begin{cases} x > -29,5, \\ 2x+59 < 9; & \begin{cases} x < -25; \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

iš čia $-29,5 < x < -25$.

2 p a v y z d y s. Išspręskime nelygybę $\lg(x+2) < 2 - \lg(2x-6)$.

S p r e n d i m a s. Kad visi logaritmai turėtų prasmę, turi būti teisingos nelygybės $x+2 > 0$ ir $2x-6 > 0$. Taikydami logaritmų savybes, nelygybę pertvarkome:

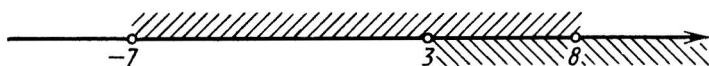
$$\lg(x+2) + \lg(2x-6) < 2, \quad \lg(x+2)(2x-6) < \lg 100.$$

Vadinasi, pradinė nelygybė ekvivalenti nelygybių sistemai

$$\begin{cases} x+2 > 0, \\ 2x-6 > 0, \\ (x+2)(2x-6) < 100. \end{cases}$$

Turime

$$\begin{cases} x > -2, \\ x > 3, \\ x^2 - x - 56 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 3, \\ (x+7)(x-8) < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 3, \\ -7 < x < 8. \end{cases}$$



91 pav.

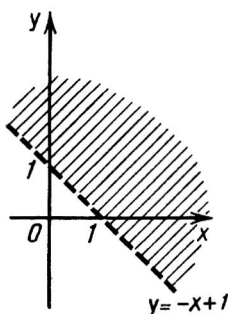
Naudodamiesi koordinačių tiese (91 pav.), nustatome, kad pasutinės sistemos, taigi ir pradinės nelygybės sprendinių aibė yra intervalas (3; 8).

135. Nelygybės su dviem kintamaisiais ir jų sistemos. Imkime nelygybę $f(x; y) > g(x; y)$. Nelygybės su dviem kintamaisiais *sprendiniu* vadiname porą tokių kintamųjų reikšmių, su kuriomis nelygybė virsta teisinga skaitine nelygybe. Bet realiųjų skaičių pora $(x; y)$ vienareikšmiškai nusako koordinačių plokštumos tašką. Todėl nelygybės ir nelygybių su dviem kintamaisiais sistemos sprendinius galima vaizduoti geometriškai, kaip tam tikrą koordinačių plokštumos taškų aibę.

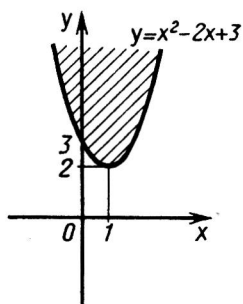
1 p a v y z d y s. Pavaizduokime koordinačių plokštumoje nelygybės $x + y - 1 > 0$ sprendinių aibę.

S p r e n d i m a s. Nelygybę parašykime taip: $y > -x + 1$. Koordinačių plokštumoje nubrėžkime tiesę $y = -x + 1$ (92 pav.). Kiekvieno taško, esančio virš tiesės $y = -x + 1$, ordinatė yra didesnė už ordinatę taško, turinčio tą pačią abscisę, bet esančio tiesėje. Todėl aibė plokštumos taškų, esančių virš tos tiesės, ir yra duotosios nelygybės sprendinių geometrinis vaizdas:

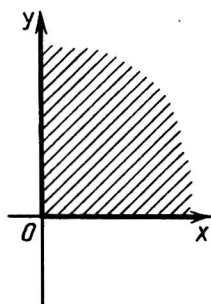
2 p a v y z d y s. Pavaizduokime koordinačių plokštumoje nelygybės $x(x-2) \leq y-3$ sprendinių aibę.



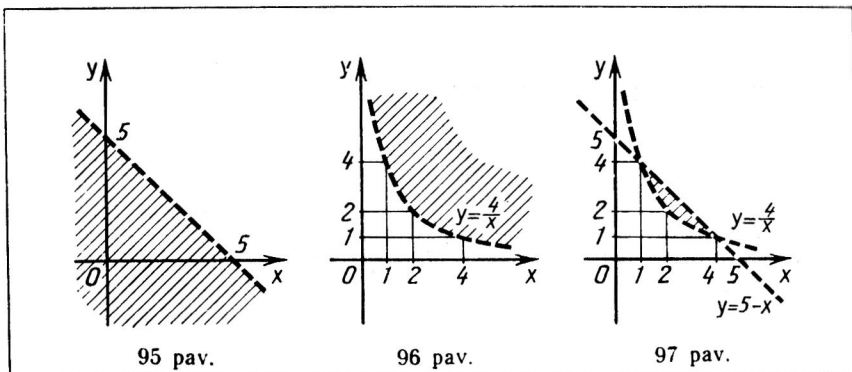
92 pav.



93 pav.



94 pav.



95 pav.

96 pav.

97 pav.

S p r e n d i m a s. Pertvarkykime nelygybę taip: $y \geq x^2 - 2x + 3$. Koordinačių plokštumoje nubraižykime parabolę — funkcijos $y = x^2 - 2x + 3$ grafiką (93 pav.).

Kiekvieno taško, esančio virš parabolės $y = x^2 - 2x + 3$, ordinatė yra didesnė už ordinatę taško, turinčio tą pačią abscisę, bet esančio parabolėje. Kadangi nelygybė $y \geq x^2 - 2x + 3$ negriežta, tai duotos nelygybės sprendinių geometrinis vaizdas yra aibė plokštumos taškų, esančių parabolėje $y = x^2 - 2x + 3$ ir virš jos.

3 p a v y z d y s. Pavaizduokime koordinačių plokštumoje nelygybių sistemas

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ xy > 4, \\ x + y < 5 \end{cases}$$

sprendinių aibę.

S p r e n d i m a s. Nelygybių sistemos $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0 \end{cases}$ sprendinių geometrinis vaizdas yra pirmojo koordinatinio kampo taškų aibė (94 pav.). Nelygybės $x + y < 5$, arba $y < 5 - x$ sprendinių geometrinis vaizdas yra aibė taškų, esančių po tiese — funkcijos $y = 5 - x$ grafiku (95 pav.). Pagaliau nelygybės $xy > 4$, arba (kadangi $x > 0$) nelygybės $y > \frac{4}{x}$ sprendinių geometrinis vaizdas yra aibė taškų, esančių virš hiperbolės šakos — funkcijos $y = \frac{4}{x}$ grafiko (96 pav.). Vadinasi, gauname aibę koordinačių plokštumos taškų, esančių pirmajame koordinatiniame kampe po tiese — funkcijos $y = 5 - x$ grafiku ir virš hiperbolės — funkcijos $y = \frac{4}{x}$ grafiko (97 pav.).



§ 15. Nelygybių įrodymas

136. Skirtumo ženklų nustatymo metodas. Šio metodo esmė yra tokia: norėdami įrodyti, kad nelygybė $f(x; y; z) > g(x; y; z)$ ($f < g$, $f \geq g$, $f \leq g$) teisinga, sudarome skirtumą $f(x; y; z) - g(x; y; z)$ ir įrodome, kad jis teigiamas (atitinkamai neigiamas, neneigiamas, neteigiamas).

1 pavyzdys. Įrodykime, kad kai $x \geq 0$, $y \geq 0$, tai $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ (dviejų neneigiamųjų skaičių aritmetinis vidurkis ne mažesnis už jų geometrinį vidurkį; šią nelygybę vadiname Koši nelygybe).

Sprendimas. Sudarykime skirtumą $\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy}$. Tada $\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{x+y-2\sqrt{xy}}{2} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2}$. Nelygybė $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$ teisinga su visomis neneigiamomis x ir y reikšmėmis. Vadinas, $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, ir lygybę turime tik tada, kai $x=y$.

2 pavyzdys. Įrodykime, kad kai $x > 0$, tai $x + \frac{1}{x} \geq 2$ (vienas kitam atvirkštinių teigiamųjų skaičių suma yra ne mažesnė už 2).

Sprendimas. Sudarykime skirtumą $x + \frac{1}{x} - 2$. Tada

$$x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x}.$$

Kadangi $\frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$ su visomis teigiamosiomis x reikšmėmis, tai įrodinėjamoji nelygybė teisinga. Lygybę turime, kai $x=1$.

137. Sintezinis nelygybių įrodymo metodas. Šio metodo esmė yra tokia: norimąją nelygybę gauname pertvarkydami tam tikras žinomas (atramines) nelygybes. Atraminės yra, pavyzdžiui, šios nelygybės:

$$1) \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \quad (x \geq 0, y \geq 0);$$

$$2) x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad (x > 0);$$

$$3) -1 \leq \sin \alpha \leq 1;$$

$$4) -1 \leq \cos \alpha \leq 1.$$

Pavyzdys. Įrodykime, kad $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$, kai a, b, c, d — neneigiamieji skaičiai.



S p r e n d i m a s. Atramine imkime Koši nelygybę, parašytą neigiamiesiems skaičiams $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{c+d}{2}$. Tada $\frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \geq \sqrt{\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}}$. Taikydami dabar Koši nelygybę skaičiams a ir b , taip pat skaičiams c ir d gauname

$$\sqrt{\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}} \geq \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}}.$$

Bet $\sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}$. Vadinasi, $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$.
 Nelygybę turime, kai $a=b=c=d$.

138. Nelygybių įrodymas priešingosios prielaidos metodu. Šio metodo esmė yra tokia. Sakykime, reikia įrodyti nelygybę

$$f(x; y; z) > g(x; y; z). \quad (1)$$

Tarkime priešingai, kad teisinga nelygybė

$$f(x; y; z) \leq g(x; y; z). \quad (2)$$

Remdamiesi nelygybių savybėmis, pertvarkome (2) nelygybę. Jeigu taip pertvarkydami gauname neteisingą nelygybę, tai šitai reiškia, kad prielaida apie (2) nelygybės teisingumą klaidinga, todėl teisinga (1) nelygybė.

P a v y z d y s. Įrodykime, kad kai $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, $d \geq 0$, tai $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$.

S p r e n d i m a s. Tarkime priešingai, kad teisinga nelygybė

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} < \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$

Pakelkime abi jos puses kvadratu. Tada

$$ab + bc + ad + cd < ab + 2\sqrt{abcd} + cd,$$

iš čia $bc + ad < 2\sqrt{abcd}$, $\frac{bc+ad}{2} < \sqrt{abcd}$. Bet tai prieštarauja Koši

nelygybei, parašytai neneigiamiesiems skaičiams bc ir ad .

Vadinasi, mūsų prielaida klaidinga, t. y. teisinga nelygybė

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$



VI SKYRIUS. SKAIČIŲ SEKOS

§ 16. Skaičių seka

139. Sekos apibrėžimas. Sakykime, kiekvienam natūraliajam skaičiui priskirtas tam tikras realusis skaičius: skaičių 1 atitinka skaičius a_1 , skaičių 2 — skaičius a_2 , skaičių 3 — skaičius a_3 , ..., skaičių n — skaičius a_n ir t. t. Tada sakome, kad apibrėžta *skaičių seka*, ir rašome: $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, arba (a_n) . Skaičius $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ vadiname *sekos nariais*: a_1 — pirmasis narys, a_2 — antrasis narys, ..., a_n — n -tasis sekos narys.

1 p a v y z d y s. $1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2, \dots$. Ši seka sudaryta taip: kiekvieną natūralųjį skaičių atitinka jo kvadratas. Čia $a_n = n^2$.

2 p a v y z d y s. Paėmę bet kurią begalinę dešimtainę trupmeną, galime sudaryti jos dešimtainių artinių su trūkumu arba su pertekliumi seką. Pavyzdžiui, paėmę skaičių 2,71828..., sudarome tokią dešimtainių artinių su trūkumu seką:

$$2; 2,7; 2,71; 2,7182; 2,71828; \dots$$

140. Sekos apibrėžimo būdai. Galima nurodyti tris pagrindinius sekos apibrėžimo būdus.

1. *Analizinis* būdas — kai seką apibrėžiame jos n -tojo nario formule. Pavyzdžiui, formulė $a_n = \frac{n}{n+1}$ apibrėžia seką $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, kurios

$$a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}; \quad a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}; \quad a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}, \dots$$

t. y. seką $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$.

2. *Rekurentinis* būdas — kai kiekvienas sekos narys, pradedant nuo tam tikro, išreiškiamas pirmesniaisiais nariais. Apibrėžiant seką šiuo būdu, nurodomas jos pirmasis narys arba keli pirmieji nariai ir formulė, pagal kurią galima apskaičiuoti kiekvieną sekos narį žinant pirmesnius narius.

P a v y z d y s. $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$.

Turime $a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2; a_6 = a_4 + a_5 = 3 + 5 = 8;$

$a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3; a_7 = a_5 + a_6 = 5 + 8 = 13;$

$a_5 = a_3 + a_4 = 2 + 3 = 5; a_8 = a_6 + a_7 = 8 + 13 = 21$ ir t. t.

Taigi gauname seką

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

Kiekvienas jos narys, išskyrus du pirmuosius, lygus dviejų prieš jį einančių narių sumai.



3. *Zodinis būdas* — kai seka apibrėžiama žodine taisykle. Taip, pavyzdžiui, apibrėžta skaičiaus 2,71828... dešimtainių artinių su trūkumu seka (žr. 139 skyrelį).

141. Didėjančios ir mažėjančios sekos. Seką (a_n) , kurios kiekvienas narys mažesnis už po jo einantį, t. y. kurios $a_n < a_{n+1}$ su kiekvienu n , vadiname *didėjančia*. Seką (a_n) , kurios kiekvienas narys didesnis už po jo einantį, t. y. kurios $a_n > a_{n+1}$ su kiekvienu n , vadiname *mažėjančia*.

Imkime pavyzdžių:

- 1) 1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2 , ... — didėjanti seka.
- 2) 2, 5, 8, 11, 14, ..., $3n - 1$, ... — didėjanti seka.
- 3) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$ — didėjanti seka.
- 4) $-1, -2, -3, -4, \dots, -n, \dots$ — mažėjanti seka.
- 5) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ — mažėjanti seka.
- 6) $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots, (-1)^n n, \dots$ — ši seka nėra nei didėjanti, nei mažėjanti.
- 7) 3, 3, 3, 3, ..., 3, ... — čia turime pastoviąją, arba stacionariąją seką.

§ 17. Progresijos

142. Aritmetinės progresijos apibrėžimas. Seką (a_n) , kurios kiekvienas narys, pradedant antruoju, yra lygus prieš jį esančiam nariui, sudėtam su tuo pačiu skaičiumi d , vadiname *aritmetine progresija*. Skaičius d — *progresijos skirtumas*. Taigi aritmetinė progresija yra lygybe $a_{n+1} = a_n + d$ rekurentiškai apibrėžta seka (žr. 139 skyrelį). Pavyzdžiui, $a_5 = a_4 + d$; $a_{94} = a_{93} + d$ ir t. t.

Kai $d > 0$, tai aritmetinė progresija didėja, o kai $d < 0$ — mažėja.

1 p a v y z d y s. 3, 5, 7, 9, 11, 13, ... — tai aritmetinė progresija, kurios $a_1 = 3$, $d = 2$.

2 p a v y z d y s. Sakykime, $a_1 = -2$, $d = 0,5$. Šios sąlygos apibrėžia aritmetinę progresiją, kurios $a_2 = -2 + 0,5 = -1,5$; $a_3 = a_2 + d = -1,5 + 0,5 = -1$; $a_4 = a_3 + d = -1 + 0,5 = -0,5$; $a_5 = a_4 + d = -0,5 + 0,5 = 0$; $a_6 = a_5 + d = 0 + 0,5 = 0,5$.

Gauname aritmetinę progresiją $-2; -1,5; -1; -0,5; 0; 0,5, \dots$.

3 p a v y z d y s. Pastovioji seka 2, 2, 2, 2, ..., 2, ... yra aritmetinė progresija, kurios $a_1 = 2$, $d = 0$.

Kartais nagrinėjame ne visą seką — aritmetinę progresiją, o tik kelis jos pirmuosius narius. Tada kalbame apie *baigtinę aritmetinę progresiją*.

Nurodydami, kad seka (a_n) yra aritmetinė progresija, kartais rašome taip:

$$\div a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

**143. Aritmetinės progresijos savybės.****1°. Aritmetinės progresijos n -tojo nario formulė:**

$$a_n = a_1 + d(n-1).$$

2°. Aritmetinės progresijos pirmųjų n narių sumos formulė:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n; \quad (1)$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n. \quad (2)$$

Čia $S_1 = a_1$, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$.

3°. Charakteristinė savybė: seka yra aritmetinė progresija tada ir tik tada, kai kiekvienas jos narys, išskyrus pirmąjį (ir paskutinį, kai aritmetinė progresija baigtinė), lygus gretimų narių aritmetiniam vidurkiui:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

1 p a v y z d y s. Bėgikas per pirmą minutę nubėgo 400 m, o per kiekvieną sekančią minutę bėgo 5 m mažiau negu per praėjusią. Kokį atstumą jis nubėgo per 1 h?

S p r e n d i m a s. Per pirmą minutę bėgikas nubėgo 400 m, per antrą — 395 m, per trečią — 390 m ir t. t. Skaičiai 400, 395, 390, ... sudaro aritmetinę progresiją, kurios $a_1 = 400$, $d = -5$. Per 1 h, t. y. per 60 min, nubėgtas atstumas lygus pirmųjų 60 progresijos narių sumai. Taikydami (2) formulę, turime:

$$S_{60} = \frac{2a_1 + d \cdot 59}{2} \cdot 60 = \frac{800 - 59 \cdot 5}{2} \cdot 60 = 15\,150.$$

Taigi per 1 h bėgikas nubėgo 15 km 150 m.

2 p a v y z d y s. Padalijus tryliktąjį aritmetinės progresijos narį iš jos trečiojo nario, gaunamas dalmuo 3, o padalijus aštuonioliktąjį narį iš septintojo nario, gaunamas dalmuo 2 ir liekana 8. Raskite dvidešimtąjį progresijos narį.

S p r e n d i m a s. Iš sąlygos išplaukia, kad $a_{13} = 3a_3$, o $a_{18} = 2a_7 + 8$ (žr. 3 skyrelį). Remiantis n -tojo nario formule, $a_3 = a_1 + 2d$, $a_{13} = a_1 + 12d$, $a_7 = a_1 + 6d$, $a_{18} = a_1 + 17d$. Gauname dviejų lygčių su dviem kintamaisiais a_1 ir d sistemą (būtent tokią sistemą dažniausiai gauname sprenddami uždavinius, susijusius su aritmetine progresija):

$$\begin{cases} a_1 + 12d = 3(a_1 + 2d), \\ a_1 + 17d = 2(a_1 + 6d) + 8. \end{cases}$$



Spręsdami šią sistemą, turime

$$\begin{cases} a_1 = 3d, \\ a_1 = 5d - 8, \end{cases}$$

iš čia $d=4$, $a_1=12$. Dabar jau nesunku rasti a_{20} :

$$a_{20} = a_1 + 19d = 12 + 19 \cdot 4 = 88.$$

144. Geometrinės progresijos apibrėžimas. Seką (b_n) , kurios pirmasis narys nelygus nuliui ir kurios kiekvienas narys, pradedant antruoju, lygus prieš jį esančiam nariui, padaugintam iš to paties nelygaus nuliui skaičiaus q , vadiname *geometrine progresija*. Skaičius q — *progresijos vardiklis*. Taigi geometrinė progresija yra lygybė $b_{n+1} = b_n q$, kai $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$, rekurentiškai apibrėžta seka (žr. 139 skyrelį). Pavyzdžiui, $b_7 = b_6 q$, $b_{54} = b_{53} q$.

1 p a v y z d y s. 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... — tai geometrinė progresija, kurios $b_1 = 1$, $q = 2$.

2 p a v y z d y s. 100, 30, 9, $\frac{27}{10}$, $\frac{81}{100}$, $\frac{243}{1000}$, ... — geometrinė progresija, kurios $b_1 = 100$, $q = \frac{3}{10}$.

3 p a v y z d y s. Sakykime, $b_1 = 2$, $q = -3$. Šios sąlygos apibrėžia geometrinę progresiją, kurios $b_2 = b_1 q = 2 \cdot (-3) = -6$; $b_3 = b_2 q = (-6) \cdot (-3) = 18$; $b_4 = b_3 q = 18 \cdot (-3) = -54$; $b_5 = b_4 q = (-54) \cdot (-3) = 162$, ...

Gauname geometrinę progresiją 2, -6, 18, -54, 162, ...

4 p a v y z d y s. Pastovioji seka 2, 2, 2, 2, ..., 2, ... yra geometrinė progresija, kurios $b_1 = 2$, $q = 1$.

Kartais nagrinėjame ne visą seką — geometrinę progresiją, o tik jos kelis pirmuosius narius. Tada kalbame apie *baigtinę geometrinę progresiją*.

Nurodydami, kad seka (b_n) yra geometrinė progresija, kartais rašome taip:

$$\div b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

145. Geometrinės progresijos savybės.

1°. *Geometrinės progresijos n-tojo nario formulė:*

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

2°. *Geometrinės progresijos pirmųjų n narių sumos formulės:*

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1};$$

$$S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}.$$

Cia $S_1 = b_1$, $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$, $q \neq 1$; kai $q = 1$, tai $S_n = nb_1$.



3°. *Charakteristinė savybė*: seka yra geometrinė progresija tada ir tik tada, kai kiekvienas jos narys, išskyrus pirmąjį (ir paskutinį, kai geometrinė progresija baigtinė), susijęs su gretimais nariais formule

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

1 p a v y z d y s. Raskime geometrinės progresijos, kurios $b_1 = 3$, $b_n = 96$, $S_n = 189$, aštuntąjį narį.

S p r e n d i m a s. Kadangi $b_n = b_1 q^{n-1}$ (1° savybė), tai $96 = 3q^{n-1}$, $q^{n-1} = 32$, arba $q^n = 32q$.

Kita vertus, remiantis 2° savybe,

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1},$$

iš čia

$$189 = \frac{3(q^n - 1)}{q - 1}, \quad \text{arba} \quad \frac{q^n - 1}{q - 1} = 63.$$

Bet $q^n = 32q$. Įrašę šią išraišką, randame:

$$\frac{32q - 1}{q - 1} = 63, \quad 32q - 1 = 63q - 63, \quad q = 2.$$

Žinodami b_1 ir q , apskaičiuojame b_8 :

$$b_8 = b_1 q^7 = 3 \cdot 2^7 = 384.$$

2 p a v y z d y s. Trys skaičiai sudaro baigtinę geometrinę progresiją. Jeigu antrą skaičių padidintume 2 vienetais, tai naujas skaičių trejetas sudarytų baigtinę aritmetinę progresiją. Jeigu to naujo trejeto trečią skaičių padidintume 9 vienetais, tai vėl gautume geometrinę progresiją. Raskime pradinį skaičių trejetą.

S p r e n d i m a s. Ieškamuosius tris skaičius pažymėkime b_1 , b_2 , b_3 . Vartodami ženklus $\div$ (aritmetinei progresijai žymėti) ir $\div\div$ (geometrinei progresijai žymėti), uždavinio sąlygas užrašome taip:

$$1) \div\div b_1, b_2, b_3.$$

$$2) \div b_1, b_2 + 2, b_3.$$

$$3) \div\div b_1, b_2 + 2, b_3 + 9.$$

Remdamiesi aritmetinės progresijos (143 skyrelio 3° savybė) ir geometrinės progresijos (145 skyrelio 3° savybė) charakteristinėmis savybėmis, atitinkamai turime:

$$1) b_2^2 = b_1 \cdot b_3; \quad 2) b_2 + 2 = \frac{b_1 + b_3}{2}; \quad 3) (b_2 + 2)^2 = b_1(b_3 + 9).$$



Kadangi $b_2 = b_1 q$, o $b_3 = b_1 q^2$, tai

$$1) b_1^2 q^2 = b_1 b_1 q^2; \quad 2) b_1 q + 2 = \frac{b_1 + b_1 q^2}{2}; \quad 3) (b_1 q + 2)^2 = b_1 (b_1 q^2 + 9).$$

Pirmą sąlygą galima praleisti, nes tai tapati lygybė. Gauname dviejų lygčių su dviem kintamaisiais b_1 ir q sistemą (tokią sistemą dažniausiai gauname sprendami uždavinius, susijusius su geometrine progresija):

$$\begin{cases} 2(b_1 q + 2) = b_1 + b_1 q^2, \\ (b_1 q + 2)^2 = b_1 (b_1 q^2 + 9). \end{cases}$$

Iš čia

$$\begin{cases} b_1(1 + q^2 - 2q) = 4, \\ b_1(9 - 4q) = 4. \end{cases}$$

Išreiškiame kintamąjį b_1 iš sistemos antros lygties: $b_1 = \frac{4}{9-4q}$. Įrašę šią išraišką vietoj b_1 į pirmą sistemos lygtį, gauname $\frac{1+q^2-2q}{9-4q} = 1$, iš čia $q' = 2$, $q'' = -4$. Atitinkamai $b_1' = 4$, $b_1'' = \frac{4}{25}$.

Vadinasi, uždavinio sąlygą tenkina du skaičių trejetai:

$$1) 4, 8, 16 \text{ (kai } b_1 = 4, q = 2);$$

$$2) \frac{4}{25}, -\frac{16}{25}, \frac{64}{25} \text{ (kai } b_1 = \frac{4}{25}, q = -4).$$

146. Begalinė geometrinės progresijos, kurios $|q| < 1$, suma. Nagrinėkime seką $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \dots, \frac{3}{2^n}, \dots$. Tai geometrinė progresija,

kurios $q = \frac{1}{2}$. Pastebime, kad kuo didesnis n , tuo mažiau sekos narys skiriasi nuo nulio; kitaip tariant, kuo didesnis n , tuo tikslesnė apytikslė lygybė $b_n \approx 0$; čia $b_n = \frac{3}{2^n}$. Analogiška savybė pasižymi kiekviena begalinė geometrinė progresija, kurios $|q| < 1$: tokioms progresijoms $b_n \approx 0$, ir ta lygybė tuo tikslesnė, kuo didesnis n . Nagrinėkime tokioms progresijoms n narių sumą (žr. 145 skyrelį)

$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}$. Kuo didesnis n , tuo mažiau S_n skiriasi nuo skaičiaus

$-\frac{b_1}{q-1}$, arba (tai tas pat) nuo skaičiaus $\frac{b_1}{1-q}$. Sa-

kome, kad $\frac{b_1}{1-q}$ yra *begalinės geometrinės progresijos, kurios $|q| < 1$, suma*, ir rašome

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$



Minėtą sumą kartais dar žymime simboliu $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots$, t. y. $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots = \frac{b_1}{1-q}$.

1 pavyzdys. Begalinės geometrinės progresijos suma lygi 9, o jos narių kvadratų suma lygi 40,5. Raskime progresijos pirmųjų šešių narių sumą.

Sprendimas. Duotąją progresiją pažymėkime taip: $\div b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$. Pagal sąlygą jos suma lygi 9, t. y. $9 = \frac{b_1}{1-q}$.

Nagrinėkime seką $b_1^2, b_2^2, b_3^2, \dots, b_n^2, \dots$. Kiekvienas jos narys gaunamas iš prieš esančio, padauginus iš q^2 , t. y. ta seka — tai geometrinė progresija $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n, \dots$, kurios pirmasis narys lygus $B_1 = b_1^2$, o vardiklis $Q = q^2$. Kadangi duotosios progresijos $|q| < 1$, tai $|q^2| < 1$, ir $|Q| < 1$. Vadinasi, progresijos $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n, \dots$ suma lygi $\frac{B_1}{1-Q}$. Iš sąlygos žinome, kad ta suma lygi

40,5, t. y. $\frac{B_1}{1-Q} = 40,5$.

Taigi gauname dviejų lygčių su dviem kintamaisiais sistemą:

$$\begin{cases} \frac{b_1}{1-q} = 9, \\ \frac{b_1^2}{1-q^2} = 40,5. \end{cases}$$

Išreiškiame b_1 iš sistemos pirmos lygties: $b_1 = 9(1-q)$. Įrašę šią išraišką į sistemos antrą lygtį, gauname $\frac{81(1-q)^2}{1-q^2} = 40,5$, arba $\frac{2(1-q)}{1+q} = 1$, iš čia $q = \frac{1}{3}$. Tada $b_1 = 9(1-q) = 9\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 6$.

Dabar galime rasti progresijos pirmųjų šešių narių sumą:

$$S_6 = \frac{b_1(q^6 - 1)}{q - 1} = \frac{6 \cdot \left(\frac{1}{3^6} - 1\right)}{\frac{1}{3} - 1} = 8 \frac{80}{81}.$$

2 pavyzdys. Begalinę periodinę dešimtainę trupmeną $0,2(54)$ paverskime paprastąja trupmena.

Sprendimas. $0,2(54) = 0,2545454\dots = 0,2 + 0,054 + 0,00054 + \dots + 0,0000054 + \dots = \frac{1}{5} + 0,054(1 + 0,01 + 0,0001 + 0,000001 + \dots)$. Suma $S = 1 + 0,01 + 0,01^2 + 0,01^3 + \dots$ yra begalinės progresijos 1; 0,01; 0,01²; 0,01³; ..., kurios vardiklis q lygus 0,01, suma. Todėl

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{1-0,01} = \frac{100}{99}.$$

Vadinasi, $0,2(54) = \frac{1}{5} + \frac{54}{1000} \cdot \frac{100}{99} = \frac{1}{5} + \frac{54}{990} = \frac{252}{990} = \frac{14}{55}$ (žr. 17 skyrelį).

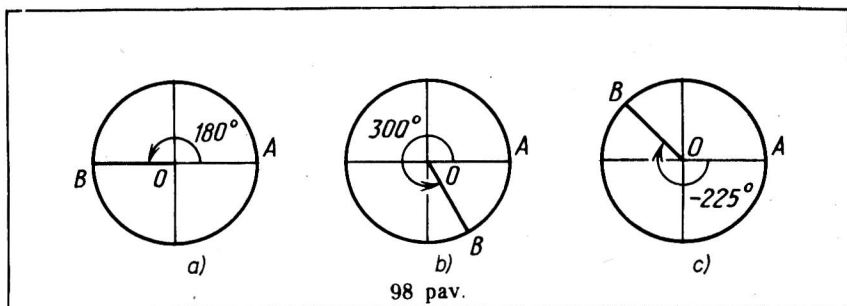


VII SKYRIUS. TRIGONOMETRINIAI REIŠKINIAI

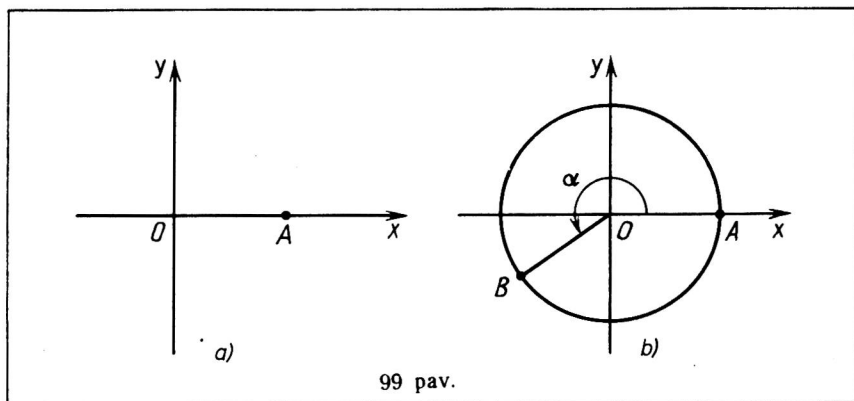
§ 18. Trigonometrinės funkcijos

147. Trigonometrinių funkcijų apibrėžimas. Kai kampas α yra iš intervalo $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, tai sąvokos $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ apibrėžtos geometrijos kurse (žr. II dalį). Algebroje nagrinėjame atkarpos OA posūkį apie tašką O bet kuriuo kampu. Atkarpą OA vadiname *pradiniu spinduliu*. Posūkį teigiamuoju kampu atliekame prieš laikrodžio rodyklę, posūkį neigiamuoju kampu — pagal laikrodžio rodyklę. 98 paveiksle parodyti posūkiai 180° , 300° , -225° kampais; pradinis spindulys OA po posūkio pereina į spindulį OB . Pasukus 360° kampu, atkarpa OA grįžta į savo pradinę padėtį.

Sakykim, α — bet kuris kampas. Koordinačių plokštumoje xy imkime tokią atkarpą OA , kad taškas A priklausytų teigiamajai x pusašei (99 a pav.). Sakykime, pasukus apie tašką O kampu α pradinis spindulys OA pereina į spindulį OB (99 b pav.). Tada *kampo α sinusą* vadiname taško B ordinatės santykį su spinduliu;



98 pav.



99 pav.



jį žymime $\sin \alpha$. *Kampo a kosinusu* vadiname taško B abscisės santykį su spinduliu; jį žymime $\cos \alpha$. *Kampo a tangentu* vadiname taško B ordinatės santykį su jo abscise; jį žymime $\operatorname{tg} \alpha$. *Kampo a kotangentu* vadiname taško B abscisės santykį su jo ordinate; jį žymime $\operatorname{ctg} \alpha$.

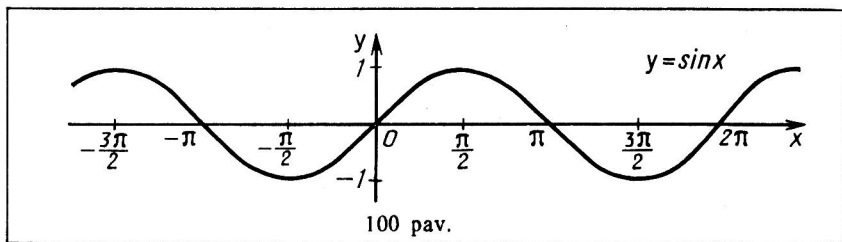
Pateikiame kai kurių kampų sinuso, kosinuso, tangento, kotangento reikšmių lentelę.

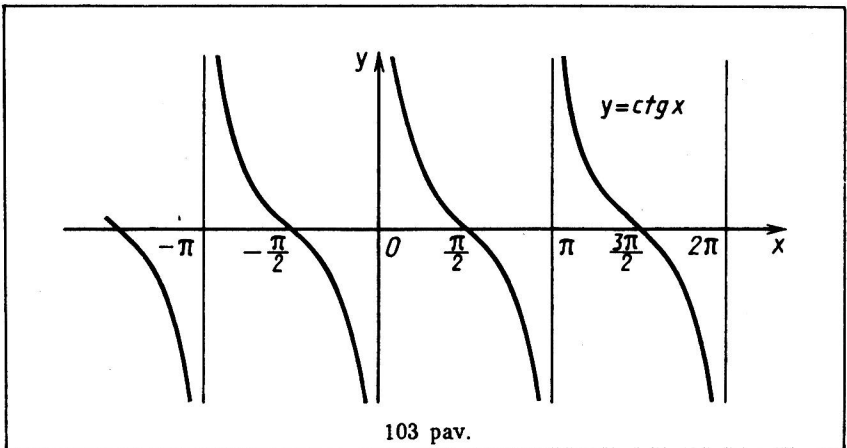
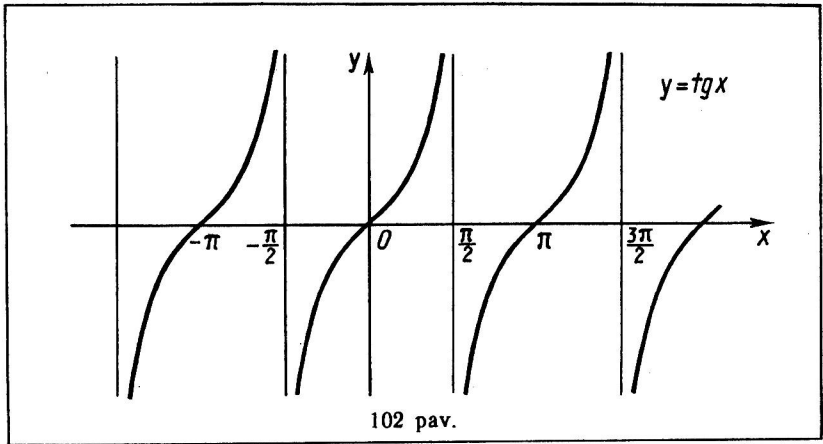
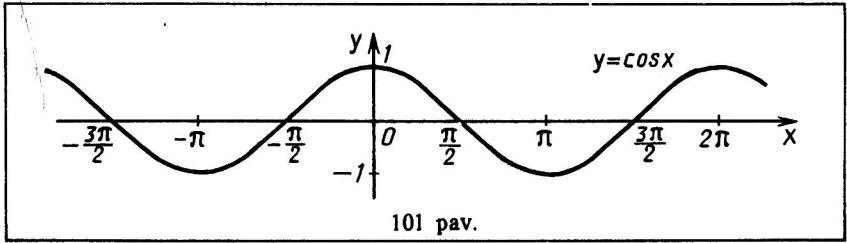
Funkcija	Argumentas α						
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0

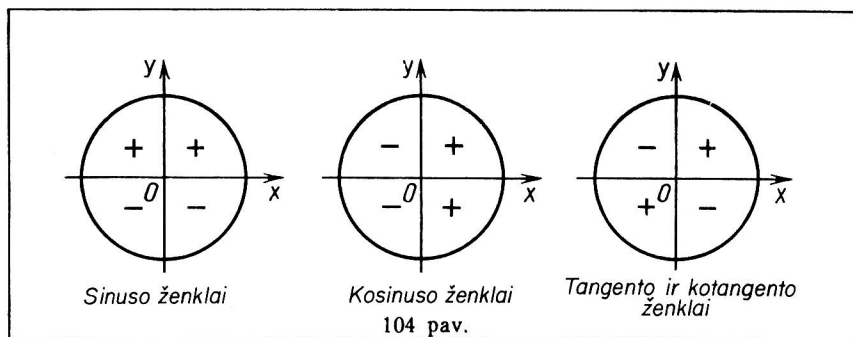
Iš apibrėžimų išplaukia, kad neegzistuoja tangentas tų kampų, kurių kosinusas lygus 0, ir kotangentas tų kampų, kurių sinusas lygus 0.

Galima kalbėti ne tik apie kampo, bet ir apie skaičiaus sinusą, kosinusą, tangentą, kotangentą. Tada vartojamas radianinis kampo matas:

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57^\circ, \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0,017 \text{ rad}.$$







Pavyzdžiui: $\sin 4 \approx \sin(4 \cdot 57^\circ) = \sin 228^\circ$,

$$\cos 225^\circ = \cos \left(225 \cdot \frac{\pi}{180} \right) = \cos \frac{5\pi}{4}.$$

Kiekvieną skaičių x atitinka vienintelė reikšmė $\sin x$ ir vienintelė reikšmė $\cos x$, taip pat $\operatorname{tg} x$ ir $\operatorname{ctg} x$. Taigi apibrėžtos funkcijos $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

Funkcijas $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ vadiname *trigonometrinėmis funkcijomis*. Tų funkcijų grafikai pavaizduoti 100–103 paveiksluose.

148. Trigonometrinių funkcijų ženklai ketvirčiuose. Sakykime, pasukus pradinį spindulį OA apie tašką O kampu x , jis pereina į spindulį OB . Iš trigonometrinių funkcijų apibrėžimo (žr. 147 skyrelį) išplaukia, kad $\sin x$ ženklas sutampa su taško B ordinatės ženklu, o $\cos x$ ženklas sutampa su taško B abscisės ženklu. Trigonometrinių funkcijų ženklai kiekviename ketvirtyje nurodyti 104 paveiksle.

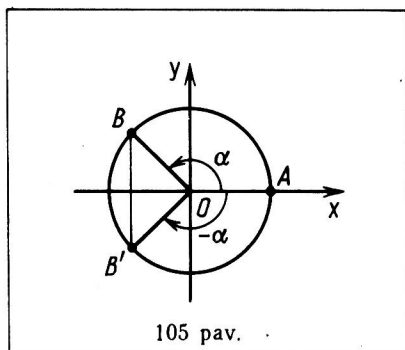
149. Trigonometrinių funkcijų savybės. Jeigu pradinį spindulį OA pasukus kampu x apie tašką O jis pereina į spindulį OB , tai pasukus kampu $-x$ pradinis spindulys OA pereis į spindulį OB' , simetrišką spinduliui OB ašies atžvilgiu (105 pav.). Taškų B ir B' abscisės lygios, o ordinatės moduliai lygūs, bet ženklai priešingi. Tai reiškia, kad

$$\cos(-x) = \cos x,$$

$$\sin(-x) = -\sin x,$$

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x,$$

$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x.$$





Taigi funkcijos $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ nelyginės, o funkcija $y = \cos x$ lyginė (žr. 67 skyrelį).

Jeigu pasukus apie tašką O kampų x pradinis spindulys pereina į spindulį OB , tai pasukus kampų $x + 360^\circ$ pradinis spindulys taip pat pereis į spindulį OB . Vadinasi,

$$\sin(x + 360^\circ) = \sin x,$$

$$\cos(x + 360^\circ) = \cos x.$$

Dar bendresnės yra lygybės

$$\sin(x + 360^\circ k) = \sin x,$$

$$\cos(x + 360^\circ k) = \cos x;$$

čia k — bet kuris sveikasis skaičius.

Kai argumentas x išreikštas radianais, tai

$$\sin(x + 2\pi k) = \sin x,$$

$$\cos(x + 2\pi k) = \cos x;$$

čia k — bet kuris sveikasis skaičius.

Teisingos ir šios lygybės:

$$\operatorname{tg}(x + \pi k) = \operatorname{tg} x,$$

$$\operatorname{ctg}(x + \pi k) = \operatorname{ctg} x;$$

čia k — bet kuris sveikasis skaičius.

Remiantis minėtomis savybėmis, reikiamo kampo trigonometrinę funkciją visada galima pakeisti trigonometriniu funkcija kampo, esančio tarp 0° ir 180° .

P a v y z d y s. Apskaičiuokime $\sin 945^\circ$.

S p r e n d i m a s. $\sin 945^\circ = \sin(720^\circ + 225^\circ) = \sin(225^\circ + 360^\circ \cdot 2) = \sin 225^\circ = \sin(225^\circ - 360^\circ) = \sin(-135^\circ) = -\sin 135^\circ$. Toliau, $\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ$ (žr. 152 skyrelį). Bet

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{žr. 147 skyrelį}), \text{ todėl } \sin 945^\circ = -\sin 135^\circ = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

§ 19. Trigonometrijos formulės ir jų taikymas pertvarkant trigonometrinius reiškinius

150. Trigonometriniai reiškiniai. Reiškinius, kuriuose kintamasis yra po trigonometrinių funkcijų ženklais, vadiname *trigonometriniais*. Pertvarkydami trigonometrinius reiškinius taikome 149 skyrelyje išvardytas trigonometrinių funkcijų savybes ir 151—157 skyreliuose nurodytas trigonometrines formules.



151. Argumentų sudėties ir atimties formulės. Su bet kuriais realiaisiais skaičiais α ir β teisingos formulės:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad (1)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta, \quad (2)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \quad (3)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta, \quad (4)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \quad (5)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \quad (6)$$

(5) formulė teisinga, kai $\alpha, \beta, \alpha + \beta$ nelygūs $\frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

(6) formulė teisinga, kai $\alpha, \beta, \alpha - \beta$ nelygūs $\frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

I p a v y z d y s. Apskaičiuokime $\sin 75^\circ$.

S p r e n d i m a s. $\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ)$. Taikydami (3) formulę, kai $\alpha = 30^\circ, \beta = 45^\circ$, gauname:

$$\sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ.$$

$$\begin{aligned} \text{Zinome, kad } \sin 30^\circ &= \frac{1}{2}, \quad \cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ (\text{žr. 147 skyrelį}). \text{ Vadinasi, } \sin(30^\circ + 45^\circ) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Taigi } \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

2 p a v y z d y s. Suprastinkime reiškini

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}.$$

S p r e n d i m a s. Pertvarkykime $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ ir $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$,

remdamiesi (3) ir (1) formulėmis ir tuo, kad $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Tada

$$\begin{aligned} & \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} = \\ &= \frac{\left(\sin\frac{\pi}{4} \cos\alpha + \cos\frac{\pi}{4} \sin\alpha\right) - \left(\cos\frac{\pi}{4} \cos\alpha - \sin\frac{\pi}{4} \sin\alpha\right)}{\left(\sin\frac{\pi}{4} \cos\alpha + \cos\frac{\pi}{4} \sin\alpha\right) + \left(\cos\frac{\pi}{4} \cos\alpha - \sin\frac{\pi}{4} \sin\alpha\right)} = \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos\alpha + \sin\alpha - \cos\alpha + \sin\alpha)}{\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos\alpha + \sin\alpha + \cos\alpha - \sin\alpha)} = \frac{2 \sin\alpha}{2 \cos\alpha} = \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

3 pavyzdys. Apskaičiuokime $\cos 15^\circ$.

Sprendimas. $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$. Taikydami (2) formulę, kai $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$, randame:

$$\begin{aligned} \cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

4 pavyzdys. Raskime $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$, kai $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$.

Sprendimas. Remkimės (5) formule ir tuo, kad $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$. Tada

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 + \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = 7.$$

152. Redukcijos formulės. *Redukcijos formulėmis* vadiname formules, kuriomis argumento $\frac{\pi n}{2} \pm \alpha$, $n \in \mathbb{Z}$, trigonometrinių funkcijų reikšmės pakeičiamos argumento α funkcijų reikšmėmis.

Pavyzdžiui, apskaičiuokime $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \frac{\pi}{2} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{2} \sin \alpha = 1 \cdot \cos \alpha + 0 \cdot \sin \alpha = \cos \alpha.$$

Analogiškai $\sin(\pi - \alpha) = \sin \pi \cos \alpha - \cos \pi \sin \alpha = 0 \cdot \cos \alpha - (-1) \sin \alpha = \sin \alpha$.



$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\frac{3\pi}{2} \cos\alpha - \sin\frac{3\pi}{2} \sin\alpha = 0 \cdot \cos\alpha - (-1) \cdot \sin\alpha = \sin\alpha.$$

Panašiai įrodomos ir kitos redukcijos formulės. Jos pateiktos lentelėje:

Funkcija	Argumentas t						
	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$
$\sin t$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos t$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} t$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} t$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$

153. To paties argumento trigonometrinių funkcijų sąsajos. 151 skyrelio (2) formulėje imkime $\alpha = \beta = t$, tada

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1, \quad (1)$$

iš čia savo ruožtu randame

$$1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}; \quad (2)$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t}. \quad (3)$$

(2) tapatybė teisinga, kai $t \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, o (3) tapatybė — kai $t \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

(1), (2) ir (3) lygybės sieja skirtingas to paties argumento trigonometrinės funkcijas. Galima parašyti dar dvi lygybes, siejančias to paties argumento trigonometrinės funkcijas:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

Sudauginę jas, gauname lygybę

$$\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1, \quad (4)$$

kuri teisinga, kai $t \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.



1 p a v y z d y s. Duota: $\sin t = -\frac{3}{5}$, $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$. Raskime $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$.

S p r e n d i m a s. Iš (1) formulės $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$ išrašę $\sin t$ reikšmę, randame:

$$\cos^2 t = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}.$$

Taigi $\cos^2 t = \frac{16}{25}$, todėl arba $\cos t = \frac{4}{5}$, arba $\cos t = -\frac{4}{5}$.

Pagal sąlygą $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$, t. y. argumentas t priklauso III ketvirčiui. Bet III ketvirtyje kosinusas neigiamas, todėl iš aukščiau nurodytų galimybių reikia pasirinkti antrąją: $\cos t = -\frac{4}{5}$.

Žinodami $\sin t$ ir $\cos t$, randame $\operatorname{tg} t$ ir $\operatorname{ctg} t$:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}, \quad \operatorname{ctg} t = \frac{4}{3}.$$

Taigi $\cos t = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} t = \frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg} t = \frac{4}{3}$.

2 p a v y z d y s. Duota, kad $\operatorname{ctg} t = -\frac{5}{12}$, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$.

Raskime $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$.

S p r e n d i m a s. Iš (3) formulės randame $\sin^2 t = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 t}$. Vietoj $\operatorname{ctg} t$ įrašę pastarąją išraišką, gauname:

$$\sin^2 t = \frac{1}{1 + \left(-\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{25}{144}} = \frac{144}{169}.$$

Vadinasi, $\sin^2 t = \frac{144}{169}$. Todėl arba $\sin t = \frac{12}{13}$, arba $\sin t = -\frac{12}{13}$.

Pagal sąlygą $\frac{\pi}{2} < t < \pi$. Taigi t priklauso II ketvirčiui, o jame sinusas yra teigiamas. Todėl iš dviejų nurodytų galimybių reikia pasirinkti pirmąją: $\sin t = \frac{12}{13}$.

Remkimės kotangento apibrėžimu $\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}$. Iš šios lygybės randame:

$$\cos t = \operatorname{ctg} t \cdot \sin t = -\frac{5}{12} \cdot \frac{12}{13} = -\frac{5}{13}.$$



Dar reikia apskaičiuoti $\operatorname{tg} t$ reikšmę. Iš lygybės $\operatorname{tg} t = \frac{1}{\operatorname{ctg} t}$ randame $\operatorname{tg} t = -\frac{12}{5}$.

$$\text{Taigi } \sin t = \frac{12}{13}, \cos t = -\frac{5}{13}, \operatorname{tg} t = -\frac{12}{5}.$$

154. Dvigubojo kampo formulės. 151 skyrelio formulėse imdami $\alpha=t, \beta=t$, gauname tokias tapatybes:

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t, \quad (1)$$

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t, \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} 2t = \frac{2 \operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg}^2 t}. \quad (3)$$

Remiantis (1), (2) ir (3) formulėmis, bet kurio argumento sinusą, kosinusą, tangeną galima išreikšti perpus mažesnio argumento trigonometrinėmis funkcijomis. Pavyzdžiui, teisingos tokios lygybės:

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2},$$

$$\sin 3x = 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{5x}{2},$$

$$\cos 8t = \cos^2 4t - \sin^2 4t.$$

Dažnai gautos formules tenka taikyti „iš dešinės į kairę“, t. y. reiškinį $2 \sin t \cos t$ keisti reiškiniu $\sin 2t$ (ar reiškinį $\sin t \cos t$ reiškiniu $\frac{\sin 2t}{2}$), reiškinį $\cos^2 t - \sin^2 t$ — reiškiniu $\cos 2t$ ir reiškinį $\frac{2 \operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg}^2 t}$ — reiškiniu $\operatorname{tg} 2t$.

P a v y z d y s. Suprastinkime reiškinį $\operatorname{tg} t - \operatorname{ctg} t$.

$$\begin{aligned} \text{S p r e n d i m a s. } \operatorname{tg} t - \operatorname{ctg} t &= \frac{\sin t}{\cos t} - \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{\sin^2 t - \cos^2 t}{\sin t \cos t} = \\ &= -\frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{\frac{1}{2} \sin 2t} = -2 \frac{\cos 2t}{\sin 2t} = -2 \operatorname{ctg} 2t. \end{aligned}$$

155. Laipsnio žeminimo formulės. Kadangi $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ (žr. 153 skyrelį), o $\cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$ (žr. 154 skyrelį), tai

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}. \quad (1)$$

Analogiškai

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}. \quad (2)$$



(1) ir (2) formulę vadiname *laipsnio žeminimo formulėmis*. Jos padeda $\sin^2 t$ ir $\cos^2 t$ pakeisti reiškiniais, į kuriuos įeina dvigubo argumento kosinuso pirmasis laipsnis. Pavyzdžiui, pritaikę (1) ir (2) formulę, gauname tokias lygybes:

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2},$$

$$\cos^2 \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) = \frac{1 + \cos \left(\frac{2\pi}{3} + 2\alpha \right)}{2}.$$

(1) ir (2) formulė taip pat taikoma „iš dešinės į kairę“, keičiant sumas $1 + \cos 2t$, $1 - \cos 2t$ sandaugomis. Pavyzdžiui, teisingos lygybės

$$1 + \cos 5x = 2 \cos^2 \frac{5x}{2}, \quad 1 - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

1 p a v y z d y s. Įrodykime tapatybę $\operatorname{tg} \frac{t}{2} = \frac{\sin t}{1 + \cos t}$.

S p r e n d i m a s. Dešinės pusės vardiklį pertvarkykime, taikydami (1) formulę, o skaitiklį — taikydami dvigubo kampo sinuso formulę (žr. 154 skyrelį). Tada

$$\frac{\sin t}{1 + \cos t} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \cos^2 \frac{t}{2}} = \frac{\sin \frac{t}{2}}{\cos \frac{t}{2}} = \operatorname{tg} \frac{t}{2}.$$

2 p a v y z d y s. Apskaičiuokime $\sin^4 x + \cos^4 x$, kai duota, kad $\cos 2x = \frac{5}{13}$.

S p r e n d i m a s. Remkimės lygybėmis $\sin^4 x = (\sin^2 x)^2$ ir $\cos^4 x = (\cos^2 x)^2$ ir taikykime laipsnio žeminimo formules. Tada

$$\begin{aligned} \sin^4 x + \cos^4 x &= (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{2 + 2 \cos^2 2x}{4} = \frac{1 + \cos^2 2x}{2} = \frac{1 + \frac{25}{169}}{2} = \frac{97}{169}. \end{aligned}$$

156. Trigonometrinių funkcijų sumos keitimas sandauga. Teisingos tokios formulės:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2},$$



$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta},$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

1 pavyzdys. Pakeiskime sandaugą reiškinių $\cos 48^\circ - \cos 12^\circ$.

Sprendimas. Taikykime kosinusų skirtumo formulę, kai $\alpha = 48^\circ$, $\beta = 12^\circ$. Tada

$$\cos 48^\circ - \cos 12^\circ = -2 \sin \frac{48^\circ + 12^\circ}{2} \sin \frac{48^\circ - 12^\circ}{2} = -2 \sin 30^\circ \sin 18^\circ.$$

Kadangi $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, tai galutinai

$$\cos 48^\circ - \cos 12^\circ = -\sin 18^\circ.$$

2 pavyzdys. Pakeiskime sandaugą $\sin x + \cos 2x - \sin 3x$.

$$\begin{aligned} \text{Sprendimas. } \sin x + \cos 2x - \sin 3x &= \cos 2x - (\sin 3x - \sin x) = \\ &= \cos 2x - 2 \sin x \cos x = 2 \cos x \left(\frac{1}{2} - \sin x \right) = 2 \cos x \left(\sin \frac{\pi}{6} - \sin x \right) = \\ &= 2 \cos x \cdot 2 \sin \frac{\frac{\pi}{6} - x}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{6} + x}{2} = 4 \cos x \sin \left(\frac{\pi}{12} - \frac{x}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{x}{2} \right). \end{aligned}$$

157*. Trigonometrinių funkcijų sandaugos keitimas suma. Teisingos tokios formulės:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)}{2}. \quad (1)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}, \quad (2)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}. \quad (3)$$

Pavyzdys. Pakeiskime sumą sandaugą $\sin 43^\circ \cos 19^\circ$.

Sprendimas. Taikykime (1) formulę, kai $\alpha = 43^\circ$, $\beta = 19^\circ$.

$$\text{Tada } \sin 43^\circ \cos 19^\circ = \frac{(\sin 43^\circ - 19^\circ) + \sin(43^\circ + 19^\circ)}{2} = \frac{1}{2} (\sin 24^\circ + \sin 62^\circ).$$



§ 20. Trigonometrinės lygtys

158. Ark sinusas, ark kosinusas, arktangentas, arkkotangentas.

1. $\arcsin m$ — tai intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, skaičius, kurio sinusas lygus m .

Teisinga formulė

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x. \quad (1)$$

1 p a v y z d y s. Apskaičiuokime: a) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

S p r e n d i m a s. a) Remiantis apibrėžimu, $y = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$ — tai toks skaičius y , kad $\sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ir $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Iš to išplaukia, kad $y = \frac{\pi}{3}$. Todėl

$$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

b) Panašiai samprotaudami nustatome, kad $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Bet, remiantis (1) formule, $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin \frac{1}{2}$, todėl $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

2. $\arccos m$ — tai intervalo $[0; \pi]$ skaičius, kurio kosinusas lygus m .

Teisinga tapatybė:

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x. \quad (2)$$

2 p a v y z d y s. Apskaičiuokime: a) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

S p r e n d i m a s. a) Remiantis apibrėžimu, $y = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ — tai toks skaičius y , kad $\cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ir $0 \leq y \leq \pi$. Iš to išplaukia, kad $y = \frac{\pi}{4}$. Todėl $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

b) Remiantis (2) formule, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Todėl $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.



3. $\arctg m$ — tai intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ skaičius, kurio tangens lygus m .

Teisinga formulė

$$\arctg(-x) = -\arctg x. \quad (3)$$

3 pavyzdys. Apskaičiuokime: a) $\arctg 1$; b) $\arctg(-\sqrt{3})$.

Sprendimas. a) Remiantis apibrėžimu, $y = \arctg 1$ — tai toks skaičius, kad $\tg y = 1$ ir $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Iš to išplaukia, kad $y = \frac{\pi}{4}$. Todėl $\arctg 1 = \frac{\pi}{4}$.

b) Panašiai samprotaudami nustatome, kad $\arctg \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$. Bet $\arctg(-\sqrt{3}) = -\arctg \sqrt{3}$. Todėl $\arctg(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$.

4. $\operatorname{arccctg} m$ — tai intervalo $(0; \pi)$ skaičius, kurio kotangentas lygus m .

Teisinga tapatybė

$$\operatorname{arccctg}(-x) = \pi - \operatorname{arccctg} x. \quad (4)$$

4 pavyzdys. Apskaičiuokime $\operatorname{arccctg}(-\sqrt{3})$.

Sprendimas. Iš pradžių raskime $y = \operatorname{arccctg} \sqrt{3}$. Tai toks skaičius, kad $\operatorname{ctg} y = \sqrt{3}$ ir $0 < y < \pi$. Todėl $y = \frac{\pi}{6}$.

Remiantis (4) formule, $\operatorname{arccctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \operatorname{arccctg} \sqrt{3}$. Vadinasi, $\operatorname{arccctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

159. Paprasčiausiosios trigonometrinės lygtys. Lygtis $\sin x = a$, kai $|a| \leq 1$, turi be galo daug šaknų. Pavyzdžiui, lygčiai $\sin x = \frac{1}{2}$ tinka reikšmės

$$x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{5\pi}{6}, x_3 = \frac{\pi}{6} + 2\pi, x_4 = \frac{\pi}{6} - 2\pi, x_5 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi, x_6 = \frac{5\pi}{6} - 2\pi$$

ir t. t. Bendroji formulė, iš kurios randame visas lygties $\sin x = a$, kai $|a| \leq 1$, šaknis, yra tokia:

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$



Cia n gali įgyti bet kurią sveikąją reikšmę, ir kiekvieną jų atitinka tam tikra lygties šaknis. Šioje formulėje (taip pat ir kitose formulėse, pagal kurias sprendžiame paprasčiausias trigonometrinės lygtis) n vadiname *parametru*. Paprastai rašome $n \in \mathbb{Z}$, pabrėždami, kad parametras n gali įgyti bet kurią sveikąją reikšmę.

Lygties $\cos x = a$, kai $|a| \leq 1$, sprendinius randame pagal formulę

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Lygtį $\operatorname{tg} x = a$ sprendžiame pagal formulę

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3)$$

o lygtį $\operatorname{ctg} x = a$ — pagal formulę

$$x = \operatorname{arccotg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

1 p a v y z d y s. Išspręskime lygtį $\sin x = \frac{1}{2}$.

S p r e n d i m a s. Remiantis (1) formule,

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Kadangi $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ (žr. 158 skyrelį), tai galutinai randame

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2 p a v y z d y s. Išspręskime lygtį $\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

S p r e n d i m a s. Remiantis (2) formule,

$$3x = \pm \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Kadangi $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \pi - \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ (žr. 158 skyrelį), tai $3x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$,

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$



3 p a v y z d y s. Išspręskime lygtį $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 2$.

S p r e n d i m a s. Remiantis (3) formule,

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} 2 + \pi n,$$

todėl

$$x = 2 \operatorname{arctg} 2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Beje, kartais patogiau taikyti šias formules:

1) $\sin x = 0$; $x = \pi n$.

2) $\sin x = 1$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

3) $\sin x = -1$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

4) $\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$.

5) $\cos x = 1$; $x = 2\pi n$.

6) $\cos x = -1$; $x = \pi + 2\pi n$.

7) $\operatorname{tg} x = 0$; $x = \pi n$.

8) $\operatorname{ctg} x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$.

1—8 formulėse n — bet kuris sveikasis skaičius.

160. Trigonometrinių lygčių sprendimo metodai. Du pagrindiniai trigonometrinių lygčių sprendimo metodai yra: 1) skaidymo dauginamaisiais metodus; 2) naujo kintamojo įvedimo metodus.

1 p a v y z d y s. Išspręskime lygtį $\sin 5x + \sin x + 2 \sin^2 x = 1$.

S p r e n d i m a s. Perkelkime 1 į kairiąją pusę ir pertvarkę išskaidykime ją dauginamaisiais.

Reiškiniui $\sin 5x + \sin x$ taikykime sinusų sumos formulę, o $2 \sin^2 x$ pakeiskime reiškiniu $1 - \cos 2x$. Tada sprendžiamoji lygtis virsta tokia lygtimi:

$$2 \sin 3x \cos 2x + (1 - \cos 2x) - 1 = 0,$$

arba $\cos 2x(2 \sin 3x - 1) = 0$. Dabar tereikia išspręsti dvi lygtis: $\cos 2x = 0$; $2 \sin 3x - 1 = 0$.



Iš lygties $\cos 2x = 0$ randame $2x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, t.y. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Iš lygties $2\sin 3x - 1 = 0$ randame $\sin 3x = \frac{1}{2}$, arba $3x = (-1)^n \times \arcsin \frac{1}{2} + \pi n$; kadangi $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, tai $3x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Vadinasi, duotosios lygties sprendinių aibę sudaro dviejų tipų skaičiai:

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2 pavyzdys. Išspręskime lygtį $2\cos^2 x + 14\cos x = 3\sin^2 x$.

Sprendimas. Kadangi $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, tai lygtį galima parašyti taip: $2\cos^2 x + 14\cos x - 3(1 - \cos^2 x) = 0$, arba $5\cos^2 x + 14\cos x - 3 = 0$.

Pažymėję $\cos x = y$, gauname kvadratinę lygtį $5y^2 + 14y - 3 = 0$. Ją išsprendę, randame $y_1 = \frac{1}{5}$, $y_2 = -3$. Vadinasi, arba $\cos x = \frac{1}{5}$, o tada $x = \pm \arccos \frac{1}{5} + 2\pi n$, arba $\cos x = -3$, ir ši lygtis neturi sprendinių, nes $|\cos x| \leq 1$.

Atsakymas. $x = \pm \arccos \frac{1}{5} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Naujo kintamojo įvedimo metodu patogų spręsti vadinamąsias *homogenines* lygtis, t. y. lygtis:

$a \sin x + b \cos x = 0$ (pirmojo laipsnio homogeninės lygtis),

$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ (antrojo laipsnio homogeninė lygtis).

Nagrinėkime atvejį, kai $a \neq 0$. Pirmos lygties abi puses padalykime iš $\cos x$, o antros lygties abi puses — iš $\cos^2 x$. Gauname $\operatorname{tg} x$ atžvilgiu algebrines lygtis, kurias galime spręsti keitiniu $\operatorname{tg} x = y$:

$$a \operatorname{tg} x + b = 0,$$

$$a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0.$$

Kai $a \neq 0$, homogeninei lygčiai netinka tos x reikšmės, su kuriomis $\cos x = 0$. Todėl abi homogeninės lygties puses dalydami iš $\cos x$ (ar $\cos^2 x$) neprarandame šaknų.

3 pavyzdys. Išspręskime lygtį $8\sin x - 7\cos x = 0$.

Sprendimas. Panariui padaliję abi lygties puses iš $\cos x$, gauname $8\operatorname{tg} x - 7 = 0$. Todėl $\operatorname{tg} x = \frac{7}{8}$, ir $x = \arctg \frac{7}{8} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.



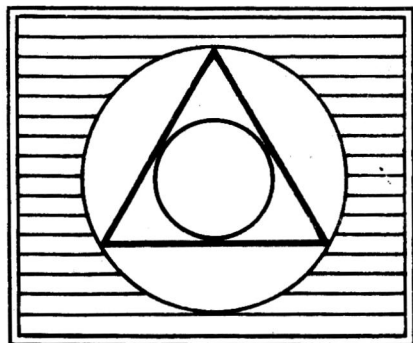
4 p a v y z d y s. Išspręskime lygtį

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0.$$

S p r e n d i m a s. Abi lygties puses padaliję iš $\cos^2 x$, gauname $\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$.

Pažymėję $\operatorname{tg} x = y$, turime kvadratinę lygtį $y^2 + 2y - 3 = 0$, kurią išsprendę randame $y_1 = -3$, $y_2 = 1$. Gauname dvi lygtis: $\operatorname{tg} x = -3$, $\operatorname{tg} x = 1$. Iš jų randame $x = -\arctg 3 + \pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

GEOMETRIJA



I SKYRIUS. GEOMETRINĖS FIGŪROS

§ 1. Apie geometrijos kurso sandarą

- | | |
|--|-----|
| 1. Geometrinės figūros | 161 |
| 2. Taškas. Tiesė | 161 |
| 3. Apibrėžimai. Aksiomos. Teoremos | 162 |

§ 2. Paprasčiausių geometrinių figūrų pagrindinės savybės

- | | |
|--|-----|
| 4. Atkarpa | 165 |
| 5. Spindulys | 166 |
| 6. Apskritimas. Skritulys | 167 |
| 7. Pusplokštumė | 167 |
| 8. Kampas. Laipsninis kampo matas | 168 |
| 9. Gretutiniai ir kryžminiai kampai | 171 |
| 10. Centriniai ir įbrėžtiniai kampai | 171 |
| 11. Lygiagrečiosios tiesės | 173 |
| 12. Tiesių lygiagretumo požymiai | 175 |
| 13. Statmenosios tiesės | 176 |
| 14. Apskritimo liestinė. Apskritimų lietimasis | 178 |
| 15. Trikampiai | 178 |
| 16. Trikampių lygumas | 181 |
| 17. Lygiašonis trikampis | 182 |
| 18. Trikampio kampų suma | 183 |
| 19. Statusis trikampis. Pitagoro teorema | 183 |

- | | |
|--|-----|
| 20. Įbrėžtinis ir apibrėžtinis apskritimas | 186 |
|--|-----|

§ 3. Brėžimo uždaviniai

- | | |
|--|-----|
| 21. Braižymo įrankiai | 187 |
| 22. Paprasčiausieji brėžimo uždaviniai | 188 |
| 23. Geometrinė taškų vieta | 190 |

II SKYRIUS. DAUGIAKAMPIAI

§ 4. Keturkampiai

- | | |
|---|-----|
| 24. Iškilieji keturkampiai | 193 |
| 25. Lygiagretainis | 194 |
| 26. Stačiakampis. Rombas. Kvadratas | 196 |
| 27. Trapecija | 197 |

§ 5. Daugiakampiai

- | | |
|--|-----|
| 28. Laužtė | 198 |
| 29. Iškilieji daugiakampiai | 199 |
| 30. Taisyklingieji daugiakampiai | 200 |
| 31. Apskritimo ilgis | 202 |

III SKYRIUS. TRIKAMPIŲ SPRENDIMAS

§ 6. Stačiojo trikampio kraštinių ir kampų sąsajos

- | | |
|---|-----|
| 32. Kosinusas, sinusas ir tangensas | 204 |
|---|-----|



33. Stačiojo trikampio kraštinių ir kampų sąsajos	205
---	-----

§ 7. Trikampių sprendimas

34. Kosinų teorema. Sinusų teorema	206
35. Trikampių sprendimas	208

IV SKYRIUS. DEKARTINĖS KOORDINATĖS

§ 8. Plokštumos koordinatės

36. Plokštumos koordinatinių apibrėžimas	210
37. Atkarpos vidurio koordinatės. Atstumas tarp taškų	211

§ 9. Figūrų lygtys

38. Apskritimo lygtis	212
39. Tiesės lygtis	214
40. Tiesės ir apskritimo susikirtimas	216

V SKYRIUS. FIGŪRŲ TRANSFORMACIJOS

§ 10. Judesiai

41. Figūrų transformacijų pavyzdžiai	217
42. Judesio sąvoka. Judesio sąvybės	219

§ 11. Panašiosios figūros

43. Panašumo transformacija ..	222
44. Panašiosios figūros	223

VI SKYRIUS. VEKTORIAI

§ 12. Vektoriaus sąvoka

45. Lygiagretusis postūmis	224
46. Vektoriaus sąvoka	225
47. Vektoriaus koordinatės	227

§ 13. Vektorių veiksmai

48. Vektorių suma	227
49. Vektoriaus daugyba iš skaičiaus. Kolinearieji vektoriai	229
50. Vektorių skaliarinė sandauga	230

VII SKYRIUS. FIGŪRŲ PLOTAI

§ 14. Paprastųjų figūrų plotai

51. Ploto sąvoka	232
52. Daugiakampių plotai	233

§ 15. Skritulio plotas

53. Panašiųjų figūrų plotai	235
54. Skritulio plotas	236



I SKYRIUS. GEOMETRINĖS FIGŪROS

§ 1. Apie geometrijos kurso sandarą

1. Geometrinės figūros. Geometrija yra mokslas apie *geometrinių figūrų* — trikampio, kvadrato, skritulio ir kt.— savybes.

Graikiškas žodis „geometrija“, lietuvių kalba reiškia „žemės matavimą“.

Geometriją, kurios mokomės mokykloje, vadiname euklidine, pagal senovės graikų mokslininko Euklido, gyvenusio III a., vardą.

Mokyklinę geometriją sudaro dvi dalys: *planimetrija* ir *stereometrija*. Planimetrijos jūs mokėtės devynmetėje mokykloje. Tai geometrijos skyrius, kuriame nagrinėjamos plokštumos geometrinės figūros.

106 paveiksle pavaizduotos įvairios plokštumose figūros. Kiekvieną figūrą įsivaizduojame sudarytą iš taškų. Kiekvienos geometrinės figūros dalis taip pat yra geometrinė figūra. Atkarpa AB yra tiesės a dalis, o skritulys ω_1 yra skritulio ω dalis (107 pav.).

Kelių geometrinių figūrų sąjunga vėl yra geometrinė figūra. 108 paveiksle pavaizduotą figūrą sudaro trikampis ir trys kvadratai.

2. Taškas. Tiesė. Plokštumos pagrindinės geometrinės figūros yra *taškas* ir *tiesė*.

Taškus žymime didžiosiomis raidėmis:

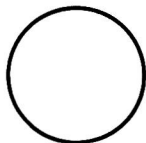
$$A, B, C, D, \dots$$

Tieses žymime mažosiomis raidėmis:

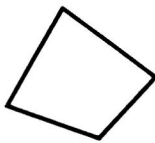
$$a, b, c, \dots$$



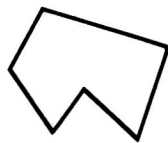
Trikampis



Apskritimas

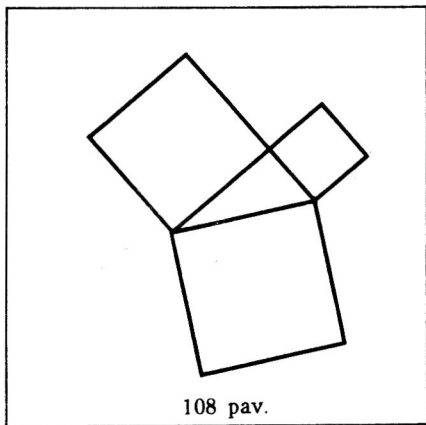
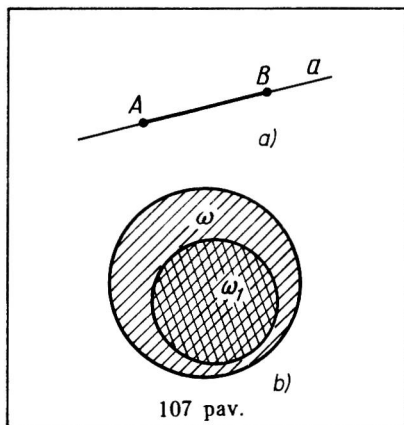


Keturkampis



Daugiakampis

106 pav.



Tiesę taip pat galima žymėti dviem jos taškais. Pavyzdžiui, 109 paveiksle pavaizduotą tiesę a galima žymėti AB , o tiesę b — MK .

109 paveiksle matome tieses a ir b bei taškus A, B, M ir K . Sakome, kad taškai M ir K yra tiesėje b , arba kad taškai M ir K priklauso tiesei b . Analogiškai taškai A ir B yra tiesėje a , arba priklauso tiesei a .

Apie tiesę kartais sakome, kad ji eina per taškus. Pavyzdžiui, tiesė a (žr. 109 pav.) eina per taškus A ir B , o tiesė b — per taškus M ir K . Taip pat galime sakyti, kad tiesė a neina per tašką M arba kad taškas K nepriklauso tiesei a .

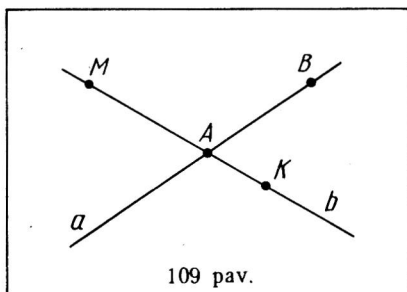
3. Apibrėžimai. Aksiomos. Teoremos. Tolešniuose skyreliuose pateiksime daugelio geometrinių figūrų ir kitų sąvokų apibrėžimus. Ką nors apibrėžti — reiškia paaiškinti, kas tai yra.

109 paveiksle matome, kad tiesės a ir b turi vieną bendrą tašką. Apie tieses, kurios turi vieną bendrą tašką, sakome, kad jos susikerta, o tašką A vadiname tiesių a ir b susikirtimo tašku. Čia pateikėme susikertančių tiesių apibrėžimą.

Samprotavimą, kuriuo nustatomas teiginio apie geometrines figūras savybę teisingumas, vadiname įrodymu.

Teiginį, išreiškiantį geometrines figūras savybę, kurio teisingumą įrodinėjame, vadiname teorema.

Visiškai aišku, kad negalima apibrėžti visų geometrijos sąvokų. Negalima įrodyti geometrinių figūrų visų savybių nelai-





kant kai kurių jų savybių pagrindinėmis, pradinėmis figūrų kitų savybių įrodymuose.

Figūrų savybes, kurias laikome teisingomis ir neįrodome, vadiname *aksiomomis*.

Pateikdami medžiagą, suformuluosime aksiomas, kuriomis pagrįstas mokyklinis planimetrijos kursas.

Pagrindinės plokštumos taškų ir tiesių priklausymo savybės irgi yra geometrijos aksiomos.

A— I_1 . | Kad ir kokia būtų tiesė, yra taškų, priklausančių tai tiesei, ir taškų, nepriklausančių tai tiesei.

A— I_2 . | Per bet kuriuos du taškus galima nubrėžti vieną ir tik vieną tiesę.

Remdamiesi suformuluotais apibrėžimais ir aksiomomis, galime įrodyti pirmąją teoremą.

1.1 t. | Dvi skirtingos tiesės arba nesusikerta, arba susikerta tik viename taške.

Jei tiesės turėtų du susikirtimo taškus, tai per tuos taškus eitų dvi skirtingos tiesės. Bet to negali būti, nes remiantis A— I_2 per du taškus eina tik viena tiesė.

Įrodydami taikėme vadinamąjį *priešingosios prielaidos metodą*.

Sio metodo esmė tokia: iš pradžių darome prielaidą, priešingą teoremos teiginiui. Po to samprotaudami remiamės aksiomomis ir anksčiau įrodytomis teoremomis gauname išvadą, kuri prieštarauja arba teoremos sąlygai, arba vienai iš aksiomų, arba anksčiau įrodytai teoremai. Tuo remdamiesi darome išvadą, kad mūsų prielaida buvo klaidinga, o todėl teisingas teoremos teiginys.

Geometrijos kurso sandarą galima apibūdinti taip:

1. Išvardijamos pagrindinės geometrijos sąvokos; jos neapibrėžiamos.

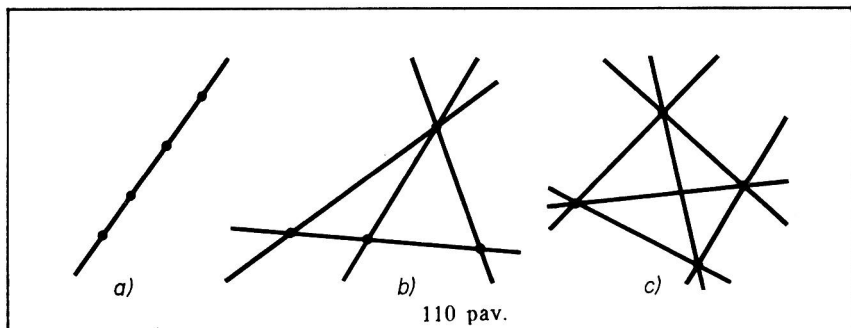
2. Remiantis tomis sąvokomis formuluojami visų kitų geometrijos sąvokų apibrėžimai.

3. Suformuluojamos aksiomos.

4. Remiantis aksiomomis ir apibrėžimais įrodomos teoremos; jomis savo ruožtu vėl remiamasi įrodant kitas geometrijos kurso teoremas.

1 p a v y z d y s. Duoti keturi taškai. Kiek skirtingų tiesių gali apibrėžti tie taškai?

S p r e n d i m a s. Remkimės aksioma A— I_2 . Čia svarbu išnagrinėti visas taškų padėtis. Iš esmės skiriasi tik trys keturių taškų padėtys (110 pav.). Pirmu atveju (110 a pav.) turime vieną



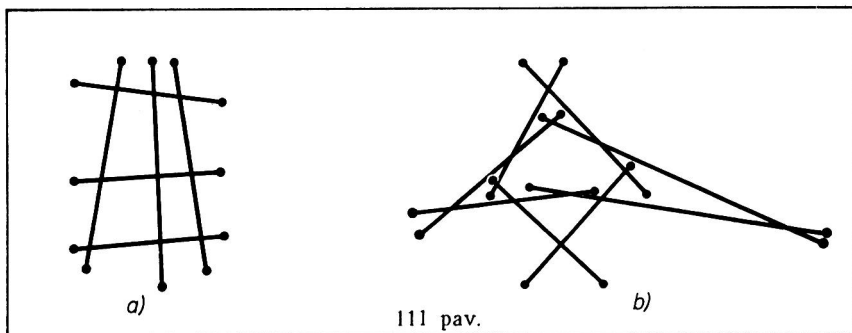
tiesę, antru atveju (110 b pav.) — keturias tieses, trečiu atveju (110 c pav.) — šešias tieses.

2 pavyzdys. Ar galima plokštumoje taip išdėstyti šešias, septynias ir aštuonias atkarpas, kad kiekviena iš jų kirstųsi lygiai su trimis kitomis?

Sprendimas. Šešias atkarpas taip išdėstyti galima (111 a pav.). Aštuonias atkarpas taip išdėstyti irgi galima (111 b pav.). Septynių atkarpų taip išdėstyti negalima.

Irodysime šį teiginį. Tarkime, kad taip išdėstyti septynias atkarpas galima. Sunumeruokime atkarpas ir sudarykime tokią 7×7 lentelę: langelyje $(i; j)$, kuriame susikerta i -toji eilutės ir j -tasis stulpelis, rašykime „+“, jei i -toji atkarpa kerta j -tąją atkarpą, ir „–“, jei jos nekerta. Kai $i=j$, taip pat rašome „–“. Dvejaip suskačiuokime lentelės ženklus „+“.

Viena vertus, kiekvienoje eilutėje jų yra 3, todėl iš viso ženklų „+“ yra $3 \cdot 7 = 21$. Kita vertus, lentelė užpildyta simetriškai įstrižinės atžvilgiu: jei langelyje $(i; j)$ parašytas „+“, tai ir langelyje $(j; i)$ taip pat parašytas „+“. Vadinasi, bendras ženklų „+“ skaičius yra lyginis. Gavome prieštarą.





§ 2. Paprasčiausių geometrinių figūrų pagrindinės savybės

4. Atkarpa. Tiesėje a (112 pav.) pažymėti taškai A , B ir C . Taškas B yra tarp taškų A ir C . Taip pat sakome, kad taškai A ir C yra skirtingose taško B pusėse. Taškai A ir B yra vienoje taško C pusėje, taškas C jų neskiria. Taškai B ir C yra vienoje taško A pusėje.

Atkarpa vadiname tiesės dalį, kurią sudaro visi tos tiesės taškai, esantys tarp dviejų nurodytų jos taškų. Tuodu taškus vadiname *atkarpos galais*. Atkarpą žymime nurodydami jos galus.

113 paveiksle matome, kad atkarpa AB yra tiesės a dalis. Taškas M yra tarp taškų A ir B , todėl jis priklauso atkarpai AB ; taškas K nėra tarp taškų A ir B , todėl jis nepriklauso atkarpai AB .

Suformuluosime taškų padėties tiesėje aksiomą (pagrindinę savybę):

A—II₁. Iš trijų tiesės taškų tik vienas yra tarp kitų dviejų.

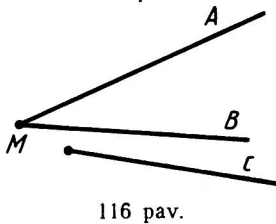
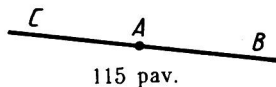
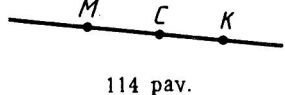
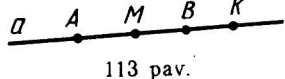
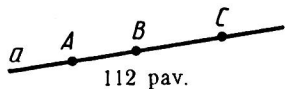
Pagrindinę atkarpų matavimo savybę išreiškia ši aksioma.

A—III₁. Kiekviena atkarpa turi tam tikrą ilgį, didesnį už nulį. Atkarpos ilgis lygus atkarpų, į kurias ją dalija bet kuris taškas, ilgių sumai.

Tai reiškia, kad atkarpoje MK pažymėjus bet kurį tašką C , atkarpos MK ilgis lygus atkarpų MC ir CK ilgių sumai (114 pav.).

Atkarpos MK ilgį vadiname *atstumu* tarp taškų M ir K .

Pavyzdys. Taškai O , P ir M priklauso vienaĩ tiesei. Žinome, kad $OM=14$ cm, $OP=8$ cm, $PM=6$ cm. Ar taškas P yra tarp taškų O ir M ? Ar gali taškas B priklausyti atkarpai PM , jeigu $BM=5$ cm, $PB=4$ cm?





Sprendimas. Įrodysime, kad taškas O nėra tarp taškų P ir M . Tarkime priešingai, — kad O yra tarp jų. Tada $PO + OM = PM$, $8\text{ cm} + 14\text{ cm} = 6\text{ cm}$, — prieštara. Vadinas, O nėra tarp P ir M . Analogiškai M nėra tarp O ir P . Remiantis aksioma $A - II_1$, taškas P yra tarp taškų O ir M .

Tarkime, kad taškas B priklauso atkarpai PM . Tada $PB + BM = PM$, $4\text{ cm} + 5\text{ cm} = 6\text{ cm}$, — prieštara. Vadinas, B nepriklauso atkarpai PM .

Atsakymas. Taškas P yra tarp taškų O ir M , taškas B nepriklauso atkarpai PM .

5. Spindulys. *Pustiesė*, arba *spinduliu*, vadiname tiesės dalį, kurią sudaro visi tos tiesės taškai, esantys vienoje nurodyto taško pusėje. Šią tašką vadiname *pustiesės pradžios tašku*, arba *spindulio pradžia*. Vienos tiesės skirtingas pustiesės, turinčias bendrą pradžios tašką, vadiname *papildomosiomis pustiesėmis*.

Pustiesės žymime mažosiomis raidėmis. Pustiesę galima žymėti ir dviem taškais: pradžios tašku ir bet kuriuo jai priklausančiu tašku. Tokiu atveju pradžios taškas rašomas pirmas. Pavyzdžiui, 115 paveiksle pavaizduoti spinduliai AB ir AC yra papildomieji; 116 paveiksle pavaizduoti spinduliai MA , MB ir spindulys c .

Suformuluosime aksiomą — *pagrindinę atkarpų atidėjimo sąlygę*.

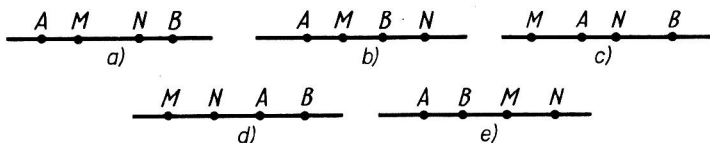
A — IV₁. | Kiekvienoje pustiesėje nuo jos pradžios taško galima atidėti vieną ir tik vieną duoto ilgio atkarpą.

Pavyzdys. Duoti taškai A ir B . Kiek tiesių galima nubrėžti per taškus A ir B ? Kiek tiesėje AB yra spindulių, kurių pradžia taškas A ? kurių pradžia taškas B ? Tiesėje AB pažymėkite du taškus, nesutampančius su A ir B . Ar jie priklauso atkarpai AB ?

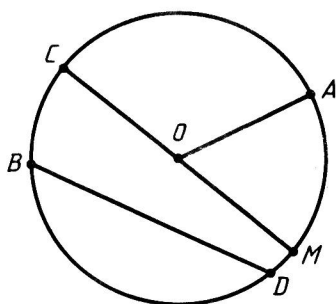
Sprendimas. 1) Remiantis aksioma $A - I_2$, per taškus A ir B visada galima nubrėžti tiesę, bet tik vieną.

2) Tiesėje AB yra du spinduliai, kurių pradžia yra taškas A ; juos vadiname papildomaisiais. Tas pats ir taško B atveju.

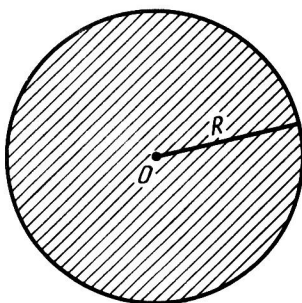
3) Atsakymas priklauso nuo pažymėtų taškų padėties. Išnagrinėkime galimus atvejus (117 pav.). Aišku, kad a) atveju



117 pav.



118 pav.



119 pav.

taškai M ir N priklauso atkarpai AB ; b) ir c) atvejais vienas taškas priklauso atkarpai, kitas ne; d) ir e) atvejais taškai M ir N nepriklauso atkarpai AB .

6. Apskritimas. Skritulys. *Apskritimu* vadiname figūrą, kurią sudaro visi plokštumos taškai, vienodai nutolę nuo duoto plokštumos taško. Tą tašką vadiname apskritimo *centru*.

Atstumą nuo apskritimo taško iki jo centro vadiname apskritimo *spinduliu*. Spinduliu vadiname ir atkarpą, jungiančią apskritimo tašką su jo centru.

Atkarpą, jungiančią du apskritimo taškus, vadiname *styga*. Stygą, einančią per centrą, vadiname *skersmeniu*.

118 paveiksle pavaizduotas apskritimas, kurio centras yra taškas O . Atkarpa OA — to apskritimo spindulys, BD — apskritimo styga, CM — apskritimo skersmuo.

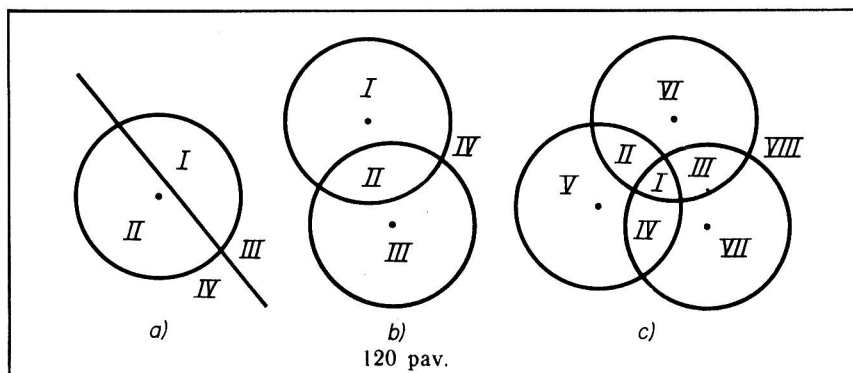
Skrituliu vadiname figūrą, kurią sudaro visi plokštumos taškai, nutolę nuo duoto plokštumos taško atstumu, ne didesniu už duotąjį. Tą tašką vadiname skritulio *centru*, o duotąjį atstumą — skritulio *spinduliu*. Skritulio kraštas yra apskritimas, kurio centras ir spindulys — tie patys (119 pav.).

P a v y z d y s . Į kiek daugiausia skirtingų dalių (neturinčių bendrų taškų, išskyrus jų kraštus) plokštumą gali dalyti: a) tiesė ir apskritimas; b) du apskritimai; c) trys apskritimai?

S p r e n d i m a s. Pavaizduokime sąlygą tenkinančias figūrų padėtis. **A t s a k y m a s:** a) keturios dalys (120 a pav.); b) keturios dalys (120 b pav.); c) aštuonios dalys (120 c pav.).

7. Pusplokštumė. Suformuluosime dar vieną geometrijos aksiomą.

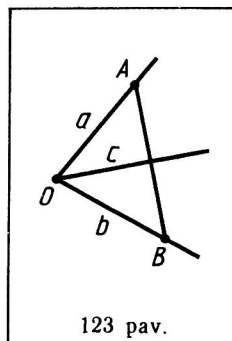
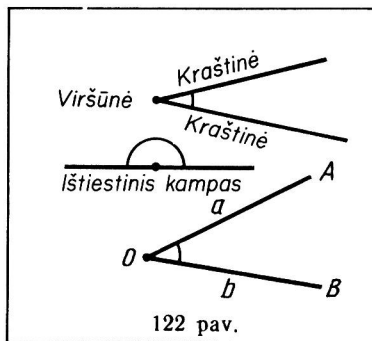
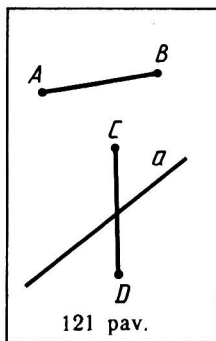
A — II₂. Tiesė dalija plokštumą į dvi pusplokštumes.



Kiekvienas plokštumos taškas priklauso vienai iš dviejų dalių, į kurias tiesė a (121 pav.) dalija plokštumą. Šis dalinys turi tokią savybę. Jeigu atkarpos galai priklauso vienai pusplokštumei, tai atkarpa *nekerta tiesės*. Jeigu atkarpos galai priklauso skirtingoms pusplokštumėms, tai atkarpa *kerta tiesę*. 121 paveikslo taškai A ir B yra vienoje iš pusplokštumių, į kurias tiesė a dalija plokštumą. Taškai C ir D yra skirtingose pusplokštumėse. Todėl atkarpa CD kerta tiesę a .

8. Kampas. Laipsninis kampo matas. *Kampu* vadiname figūrą, kurią sudaro dvi skirtingos pus tiesės, turinčios bendrą pradžios tašką. Tą tašką vadiname *kampo viršūne*, o pus tieses — *kampo kraštinėmis* (122 pav.). Kampą, kurio kraštinės yra papildomosios pus tiesės, vadiname *ištiestiniu*.

Kampą žymime nurodydami arba jo viršūnę, arba jo kraštines, arba tris taškus: viršūnę ir du kampo kraštinių taškus. Žodį





„kampas“ kartais pakeičiame ženklu $\angle$. Kampą, pavaizduotą 122 paveiksle, galima žymėti trejais:

$$\angle O, \angle(ab), \angle AOB.$$

Sakome, kad spindulys *eina tarp kampo* (ab) kraštinių, kai jis išeina iš kampo viršūnės ir kerta atkarpą, kurios galai priklauso kampo kraštinėms.

Spindulys c (123 pav.) eina tarp kampo (ab) kraštinių, nes jis kerta atkarpą AB .

Kai kampas yra ištiestinis, laikome, kad kiekvienas spindulys, išeinantis iš kampo viršūnės ir nesutampantis su jo kraštinėmis, eina tarp kampo kraštinių.

Pagrindines kampų matavimo savybes išreiškia ši aksioma.

A — III₂. Kiekvienas kampas turi laipsninį matą, didesnį už nulį. Ištiestinis kampas lygus 180° . Kampo laipsninis matas lygus kampų, į kuriuos jį dalija bet kuris tarp jo kraštinių einantis spindulys, laipsninių matų sumai.

Vadinasi, jeigu spindulys c eina tarp kampo (ab) kraštinių, tai kampas (ab) lygus kampų (ac) ir (bc) sumai, t. y. $\angle(ab) = \angle(ac) + \angle(cb)$.

Kampai matuojami *laipsniais* su matlankiu.

Kampą, lygų 90° , vadiname *stačiuoju kampu*. Kampą, mažesnį už 90° , vadiname *smailiuoju kampu*. Kampą, didesnį už 90° bet mažesnį už 180° , vadiname *bukuoju kampu*.

Suformuluosime *pagrindinę kampų atidėjimo savybę*.

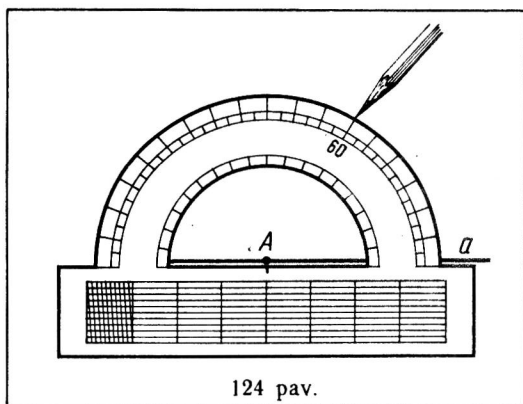
A — IV₂. Prie kiekvienos pustiesės nurodytoje pusplokštumėje galima atidėti vieną ir tik vieną kampą, turintį duotą laipsninį matą, mažesnį už 180° .

Imkime pustiesę c . Prateškime ją už pradžios taško O . Gauta tiesė plokštumą dalija į dvi *pusplokštumes*. 124 paveiksle parodyta, kaip matlankiu viršutinėje pusplokštumėje atidedamas 60° kampas.

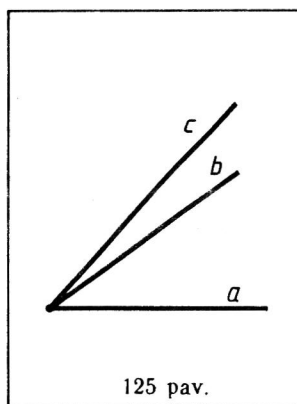
1.2 t. Jei prie duotos pustiesės vienoje pusplokštumėje atidėsime du kampus, tai mažesniojo kampo kraštinė, nesutampanti su duota pustiese, eis tarp didesniojo kampo kraštinių.

Sakykime, $\angle(ab)$ ir $\angle(ac)$ — kampai, atidėti prie pustiesės a vienoje pusplokštumėje, ir kampas (ab) mažesnis už kampą (ac). 1.2 teorema tvirtina, kad spindulys b eina tarp kampo (ac) kraštinių (125 pav.).

Kampo pusiaukampinė vadiname spindulį, kuris išeina iš jo viršūnės, eina tarp jo kraštinių ir dalija kampą pusiau. Spindulys OM (126 pav.) yra kampo AOB pusiaukampinė.



124 pav.



125 pav.

Toliau mums prireiks plokščiojo kampo sąvokos.

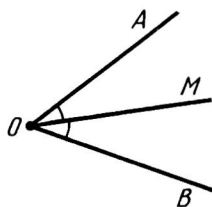
Plokščiuoju kampu vadiname plokštumos dalį, kurią riboja du iš vieno taško išeinantys ir nesutampantys spinduliai. Tuos spindulius vadiname *kampo kraštinėmis*. Yra du plokštieji kampai su duotosiomis kraštinėmis. Juos vadiname *papildomaisiais*. 127 paveiksle subrūkšniuotas plokščiasis kampas, kurio kraštinės a ir b .

Kai plokščiasis kampas yra pusplokštumos dalis, tai jo laipsninis matas lygus paprastojo kampo su tomis pačiomis kraštinėmis laipsniniam matui. Kai plokščiasis kampas apima pusplokštumą, tai jo laipsninis matas lygus $360^\circ - a$; čia a — papildomojo plokščiojo kampo laipsninis matas.

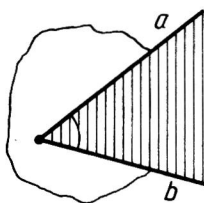
P a v y z d y s. Tarp kampo (cd) , lygaus 120° , kraštinių eina spindulys a . Raskite kampus (ca) ir (da) , kai jų laipsninių matų santykis lygus 4:2.

S p r e n d i m a s. Spindulys a eina tarp kampo (cd) kraštinių, todėl pagal pagrindinę kampų matavimo savybę (žr. 8 skyrelį)

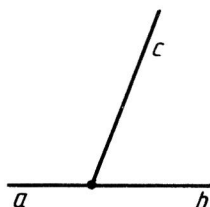
$$\angle(ca) + \angle(da) = \angle(cd).$$



126 pav.



127 pav.



128 pav.



Kadangi kampo (ca) ir kampo (da) laipsninių matų santykis lygus 4:2, tai

$$\angle(ca) = \frac{120^\circ}{6} \cdot 4 = 80^\circ, \quad \angle(da) = \frac{120^\circ}{6} \cdot 2 = 40^\circ.$$

9. Gretutiniai ir kryžminiai kampai. *Gretutiniais kampais* vadiname du kampus, kurių viena kraštinė bendra, o kitos dvi yra papildomosios pusės. 128 paveikslo kampai (ac) ir (cb) yra gretutiniai.

1.3 t. | Gretutinių kampų suma lygi 180° .

Iš 1.3 teoremos išplaukia:

- 1) jei kampai lygūs, tai lygūs ir jų gretutiniai kampai;
- 2) stačiojo kampo gretutinis kampas yra status;
- 3) smailiojo kampo gretutinis kampas yra bukas, o bukojo kampo gretutinis kampas — smailus.

Kryžminiais kampais vadiname du kampus, kurių vieno kraštinės yra kito kraštinių papildomosios pusės. 129 paveikslo kampai (ab) ir (a_1b_1) yra kryžminiai.

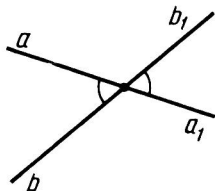
1.4 t. | Kryžminiai kampai yra lygūs.

P a v y z d y s. Kampas COD lygus 30° (130 pav.). Kam lygūs kampai AOK ir DOK ?

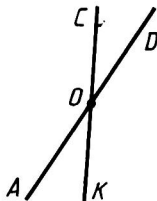
S p r e n d i m a s. Kampai COD ir AOK kryžminiai, todėl remiantis 1.4 teorema jie lygūs, t. y. $\angle AOK = 30^\circ$. Kampas DOK yra kampo COD gretutinis, todėl remiantis 1.3 teorema

$$\angle DOK = 180^\circ - \angle COD = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ.$$

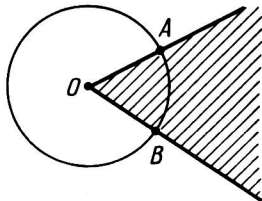
10. Centriniai ir įbrėžtiniai kampai. Apskritimo *centrinis kampas* vadiname plokščiąjį kampą, kurio viršūnė yra apskritimo centras. Plokščiojo kampo viduje esančią apskritimo dalį vadiname tą centrinį kampą atitinkančiu *apskritimo lanku*. Apskritimo lanko



129 pav.



130 pav.



131 pav.



laipsniniu matu vadiname atitinkamo centrinio kampo laipsninį matą.

Kampas AOB (131 pav.) — apskritimo centrinis kampas, jo viršūnė O yra duotojo apskritimo centras, o kraštinės OA ir OB kerta apskritimą. Lankas AB yra apskritimo dalis, esanti plokščiojo kampo viduje.

131 paveiksle pavaizduoto lanko AB laipsninis matas yra lygus kampo AOB laipsniniam matui. Lanko AB laipsninį matą žymime taip: $\smile AB$.

Kampą, kurio viršūnė yra apskritime, o kraštinės kerta tą apskritimą, vadiname *įbrėžtu į tą apskritimą*, arba trumpiau — *įbrėžtiniu*. 132 paveiksle pavaizduoti įbrėžtiniai kampai.

1.5 t. | Įbrėžtinis kampas, kurio kraštinės eina per du duotus apskritimo taškus, lygus pusei kampo, sudaryto į tuos taškus nubrėžtų spindulių, arba tą pusę papildo iki 180° .

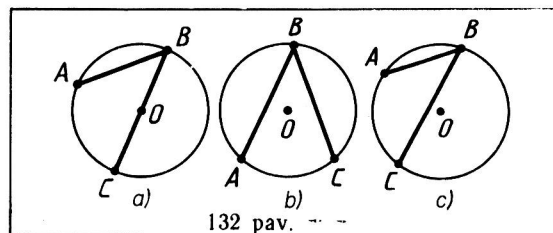
Įrodant 1.5 teoremą, reikia išnagrinėti tris skirtingus atvejus: viena iš įbrėžtinio kampo kraštinių eina per apskritimo centrą (132 a pav.); apskritimo centras yra tarp įbrėžtinio kampo kraštinių (132 b pav.); apskritimo centras yra šalia įbrėžtinio kampo (132 c pav.).

1.5 teoremos išvada: *įbrėžtiniai kampai, kurių kraštinės eina per du duotus apskritimo taškus, o viršūnės yra vienoje pusėje nuo tiesės, jungiančios šiuos taškus, yra lygūs; įbrėžtinis kampas, kurio kraštinės eina per apskritimo skersmens galus, yra status.*

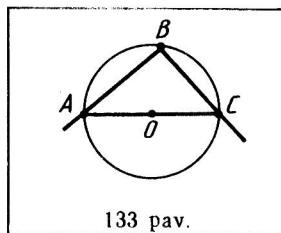
Įbrėžtinio kampo ABC (133 pav.) kraštinės eina per skersmens AC galus, todėl $\angle ABC = 90^\circ$.

P a v y z d y s. Taškai A , B ir C priklauso apskritimui, kurio centras yra O . Raskite kampą AOC , kai $\angle ABC = 66^\circ$.

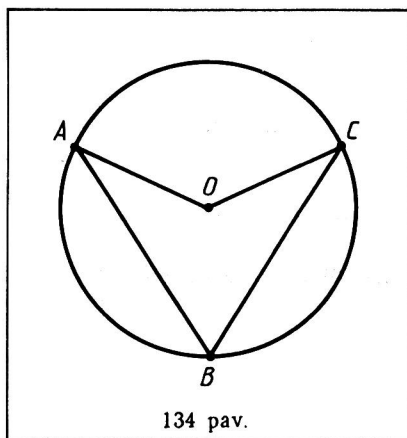
S p r e n d i m a s. Įbrėžtinis kampas ABC remiasi į lanką AC , o $\angle AOC$ — duotojo apskritimo centrinis kampas (134 pav.). $\angle ABC = 66^\circ$, todėl remiantis 1.5 teorema $\smile AC = 132^\circ$, o kampas AOC centrinis, tai jo laipsninis matas lygus lanko AC laipsniniam matui, t. y. $\angle AOC = 132^\circ$.



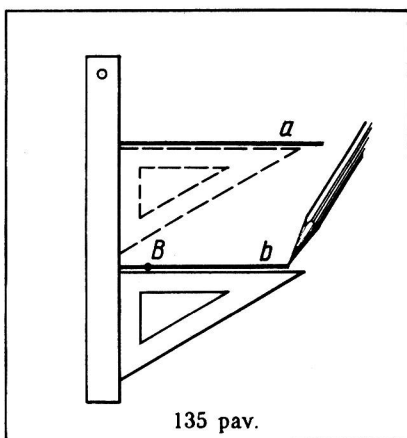
132 pav.



133 pav.



134 pav.



135 pav.

11. Lygiagrečiosios tiesės. Dvi plokštumos tiesės, kurios nesusikerta, vadiname *lygiagrečiomis*. Čia tiesės laikomos neribotai pratęstomis abiem kryptimis.

135 paveiksle parodyta, kaip kampiniu ir liniuote per tašką B brėžiama tiesė b , lygiagreti tiesei a .

Tiesių lygiagretumui žymėti vartojame ženklą $\parallel$. Užrašą $a \parallel b$ skaitome šitaip: „Tiesė a lygiagreti tiesei b “.

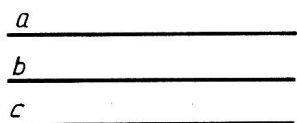
Suformuluosime lygiagretumo aksiomą — *pagrindinę lygiagrečių tiesių savybę*.

A — V. | Plokštumoje per tašką, nepriklausantį duotai tiesei, galima nubrėžti ne daugiau kaip vieną tiesę, lygiagrečią tai tiesei.

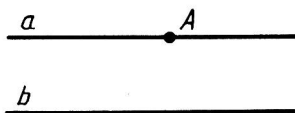
1.6 t. | Dvi tiesės, lygiagrečios trečiai tiesei, yra lygiagrečios viena kitai.

136 paveiksle tiesės a ir b lygiagrečios tiesei c . 1.6 teorema tvirtina, kad $a \parallel b$.

Galima įrodyti, kad per tašką C , nepriklausantį tiesei AB , galima nubrėžti tiesę, lygiagrečią tiesei AB . 137 paveiksle per tašką A , nepriklausantį tiesei b , nubrėžta tiesė a , lygiagreti tiesei b .



136 pav.



137 pav.



Palyginę šį teiginį ir lygiagrečių aksiomą, padarome svarbią išvadą: per tašką, nesantį duotoje tiesėje, galima nubrėžti vieną ir tik vieną jai lygiagrečią tiesę.

Siame skyrelyje išnagrinėjome labai svarbią visai geometrijos istorijai lygiagrečių aksiomą. Tą geometrijos dalį, kuri nepriklauso nuo lygiagrečių aksiomos, vadiname *absoliučiąja geometrija*. Teoremos, kuriose nevartojama lygiagrečių sąvoka ir aksioma, yra absoliučiosios geometrijos teoremos. Pavyzdžiui, mūsų žinyne — tai 1.1 — 1.5 teoremos.

Kaip pavyzdį teoremos, kuri remiasi lygiagretumo sąvoka ir kurios įrodymas remiasi lygiagrečių aksioma, galima nurodyti Talio teoremą. Talis Miletietis — senovės graikų matematikas, gyvenęs 625—547 m. p. m. e.

1.7 t. | *Talio teorema.* Jei lygiagrečios tiesės, kertančios kam-
po kraštines, vienoje jo kraštinėje iškerta lygias atkar-
pas, tai jos iškerta lygias atkarpas ir kitoje jo krašti-
nėje.

Sakykime, lygiagrečios tiesės kerta vieną iš kampo kraštinių taškuose A_1, A_2, A_3 ir A_2 yra tarp A_1 ir A_3 (138 pav.). Kitą kampo kraštinę tiesės kerta atitinkamai taškuose B_1, B_2, B_3 . 1.7 teorema teigia, kad jeigu $A_1A_2 = A_2A_3$, tai $B_1B_2 = B_2B_3$.

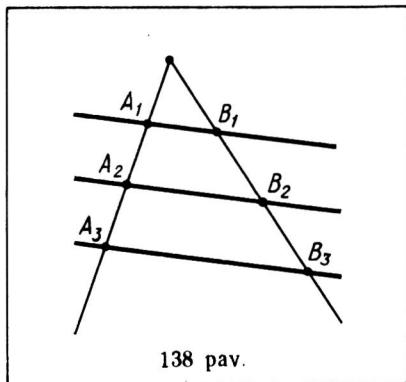
Euklidas savo „Pradmenyse“ lygiagrečių aksiomą vadino „penktuoju postulatu“. Jau senovės geometrams „nepatiko“ ta aksioma, ir jie stengėsi įrodyti lygiagrečios tiesės vienatį. Tie nesėkmingi mėginimai tęsėsi daugiau kaip 2000 metų, iki pat XIX a. Pačia vienatimi niekas neabejojo (taip giliai buvo įsišaknijęs tikėjimas Euklido geometrijos teisingumu), ir visi tik kėlė klausimą, ar negalima jo įrodyti, remiantis kitomis aksiomomis ir anksčiau įrodytais geometrijos faktais, t. y. ar tai nėra teorema.

Mėginimai įrodyti lygiagrečių aksiomą priešingosios prielaidos metodu, t. y. tarus, kad per tašką galima nubrėžti kelias tieses, lygiagrečias duotajai, turėjo (kaip tat paprastai būna įrodymuose priešingosios prielaidos metodu) vesti prie prieštaros.

Tačiau taip niekad neatsitikdavo. Didysis rusų matematikas N. Lobačevskis (ir nepriklausomai nuo jo vengrų matematikas J. Bojajis) įrodė, kad tarus, jog per tašką galima nubrėžti kelias tieses, lygiagrečias duotajai, galima sukurti kitą, tokią pat „teisingą“ „neeuclidinę geometriją“. Taip gimė *Lobačevskio geometrija*.

1 p a v y z d y s. Ar gali septynios tiesės susikirsti aštuoniuose taškuose?

S p r e n d i m a s. Gali. 139 paveiksle pavaizduotos reikiamos septynios tiesės (trys iš jų lygiagrečios).





2 pavyzdys. Atkarpą AC padalykite į 6 lygias dalis.

Sprendimas. Iš taško A išveskime spindulį AM , nesantį tiesėje AC . Spindulyje AM nuo taško A paeiliui atidėkime 6 lygias atkarpas (140 pav.). Atkarpų galus pažymėkime $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$. Tašką A_6 sujunkime atkarpa su tašku C . Per taškus A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 brėžkime tieses, lygiagrečias tiesei A_6C . Tų tiesių ir atkarpos AC susikirtimo taškai padalys atkarpą į 6 lygias dalis (remiantis 1.7 teorema).



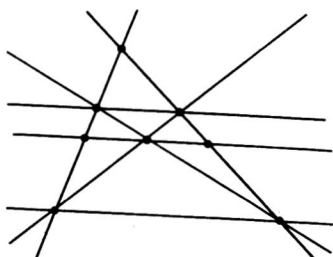
N. Lobačevskis

12. Tiesių lygiagretumo požymiai.

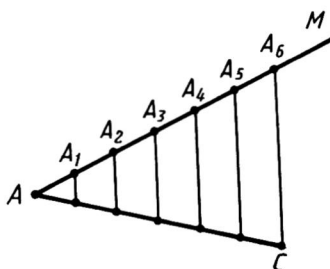
Sakykime, AB ir CD — dvi tiesės, o AC — trečia tiesė, kuri kerta tieses AB ir CD (141a pav.). Tiesę AC vadinysime tiesių AB ir CD *kirstine*. Tų tiesių sudaromus kampus dažnai nagrinėjame poromis. Tos kampų poros turi specialius pavadinimus. Jei taškai B ir D yra vienoje pusplokštumėje kirstinės AC atžvilgiu, tai kampus BAC ir DCA vadiname *vidaus vienašaliais kampais* (141 a pav.). Jei taškai B ir D yra skirtingose pusplokštumėse kirstinės AC atžvilgiu, tai kampus BAC ir DCA vadiname *vidaus priešiniais kampais* (141 b pav.).

Kirstinė AC su tiesėmis AB ir CD sudaro dvi poras vidaus vienašalių ($\angle 4$ ir $\angle 6$, $\angle 3$ ir $\angle 5$) ir dvi poras vidaus priešinių kampų ($\angle 4$ ir $\angle 5$, $\angle 3$ ir $\angle 6$, 141 c pav.).

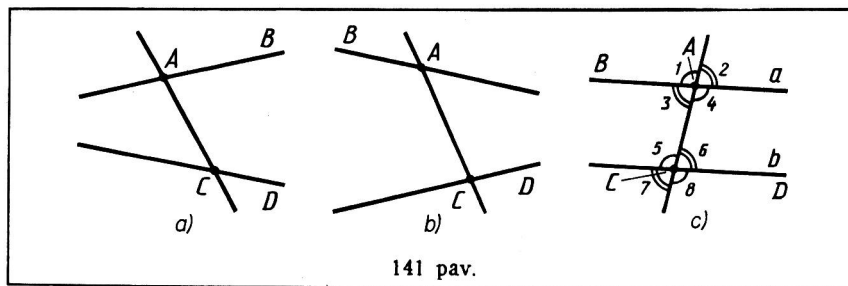
1.8 t. | Jei vidaus priešiniai kampai lygūs arba vidaus vienašalių kampų suma lygi 180° , tai tiesės lygiagrečios.



139 pav.



140 pav.



Nagrinėkime 141c paveiksle pavaizduotas keturias kampų poras. 1.8 teorema teigia, kad jeigu $\angle 3 = \angle 6$ arba $\angle 4 = \angle 5$, tai tiesės a ir b yra lygiagrečios. 1.8 teorema taip pat teigia, kad jeigu $\angle 4 + \angle 6 = 180^\circ$ arba $\angle 3 + \angle 5 = 180^\circ$, tai tiesės a ir b lygiagrečios.

1.6 ir 1.8 teoremos išreiškia tiesių lygiagretumo požymius.

Teisinga ir teorema, atvirkštinė 1.8 teoremai.

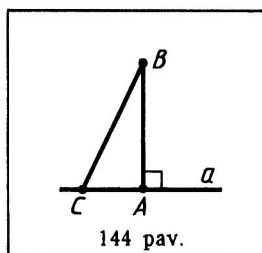
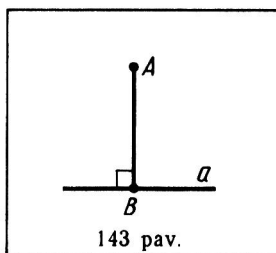
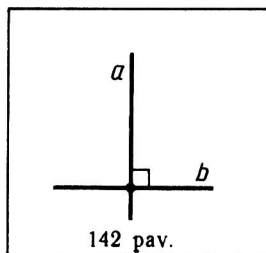
1.9 t. | Jei dvi lygiagrečios tiesės kerta trečią tiesę, tai vidaus priešiniai kampai yra lygūs, o vidaus vienašalių kampų suma lygi 180° .

P a v y z d y s. Vienas iš vidaus vienašalių kampų, susidariusių dvi lygiagrečias tieses perkirtus trečiąja, 4 kartus didesnis už kitą. Kam lygūs tie kampai?

S p r e n d i m a s. Remiantis 1.9 teorema, vidaus vienašalių kampų, kuriuos sudaro dvi lygiagrečios tiesės ir kirstinės, suma lygi 180° .

Pažymėkime tuos kampus α ir β ; tada $\alpha + \beta = 180^\circ$. Žinome, kad α 4 kartus didesnis už β , todėl $\alpha = 4\beta$, tada $5\beta = 180^\circ$, t. y. $\beta = 36^\circ$, $\alpha = 4\beta = 144^\circ$. Taigi $\alpha = 144^\circ$, $\beta = 36^\circ$.

13. Statmenosios tiesės. Statmenomis tiesėmis vadiname dvi tieses, kurios susikerta stačiu kampu. (142 pav.).





Tiesių statmenumą žymime ženklu $\perp$. Užrašą $a \perp b$ skaitome šitaip: „Tiesė a statmena tiesei b “.

Statmeniu duotajai tiesei vadiname jai statmenos tiesės atkarpą, kurios galas yra tų tiesių susikirtimo taškas. Šį atkarpos galą vadiname *statmens pagrindu*.

143 paveiksle statmuo AB nuleistas iš taško A į tiesę a . Taškas B yra to statmens pagrindas.

1.10 t. | Per kiekvieną tiesės tašką galima nubrėžti vieną ir tik vieną jai statmeną tiesę.

1.11 t. | Iš bet kurio taško, nepriklausančio duotai tiesei, galima nuleisti vieną ir tik vieną statmenį į tą tiesę.

Statmens, nuleisto iš taško į tiesę, ilgį vadiname *atstumu nuo taško iki tiesės*.

Atstumu tarp lygiagrečių tiesių vadiname bet kurio vienos tiesės taško atstumą iki kitos tiesės.

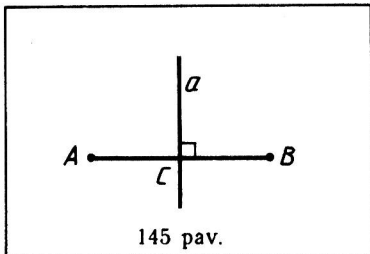
Sakykime, BA yra statmuo, nuleistas iš taško B į tiesę a , o C — bet kuris tiesės a taškas, nesutampantis su tašku A . Atkarpą BC vadiname *pasvirąja*, išvesta iš taško B į tiesę a (144 pav.). Tašką C vadiname *pasvirošios pagrindu*. Atkarpą AC vadiname *pasvirošios projekcija*.

Tiesę, einančią per atkarpos vidurį ir statmeną jai, vadiname *vidurio statmeniu*.

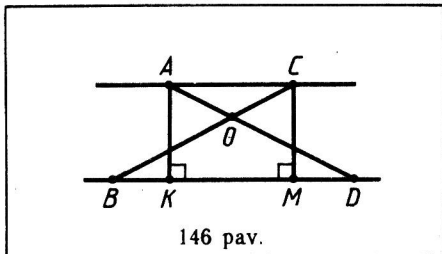
145 paveiksle tiesė a statmena atkarpai AB ir eina per tašką C — atkarpos AB vidurį.

P a v y z d y s. Lygios atkarpos AD ir CB , kurių galai yra lygiagrečiose tiesėse AC ir BD , susikerta taške O . Įrodykite, kad $AO=CO$ ir $BO=DO$.

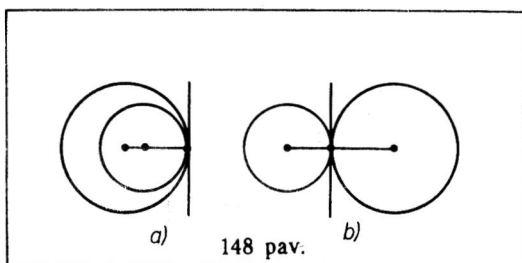
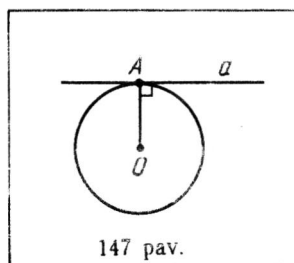
S p r e n d i m a s. Iš taškų A ir C nuleiskime statmenis į tiesę BD (146 pav.). $AK=CM$ kaip atstumas tarp lygiagrečių tiesių. Statieji trikampiai AKD ir CMB lygūs pagal įžambinę ir statinį (žr. 1.25 teoremą), todėl $\angle B = \angle D$. Trikampis BOD — lygiašonis (1.19 teorema), todėl $BO=DO$. Iš trikampių AKD ir CMB



145 pav.



146 pav.



lygumo išplaukia, kad $\angle DAK = \angle BCM$. Tada $\angle CAO = \angle ACB$, t. y. trikampis AOC lygiašonis, todėl $AO = CO$.

14. Apskritimo liestinė. Apskritimų lietimasis. Tiesę, einančią per apskritimo tašką ir statmeną spinduliui, išvestam į tą tašką, vadiname *liestine*. Tokiu atveju tą apskritimo tašką vadiname *lietimosi tašku*. 147 paveiksle tiesė a , nubrėžta per apskritimo tašką A , yra statmena spinduliui OA . Tiesė a yra apskritimo liestinė. Taškas A yra lietimosi taškas. Galima dar sakyti, kad apskritimas liečia tiesę a taške A .

Sakome, kad du apskritimai, turintys bendrą tašką, *liečiasi* tame taške, kai jie tame taške liečia bendrą liestinę. Apskritimų lietimąsi vadiname *vidiniu*, kai jų centrai yra vienoje bendrosios liestinės pusėje. Apskritimų lietimąsi vadiname *išoriniu*, kai jų centrai yra skirtingose bendrosios liestinės pusėse. 148 a paveiksle apskritimai liečiasi iš vidaus, o 148 b paveiksle — iš išorės.

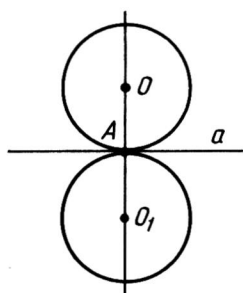
I p a v y z d y s. Nubrėžkite duoto spindulio apskritimą, liečiantį duotą tiesę duotame taške.

S p r e n d i m a s. Apskritimo liestinė statmena spinduliui, išvestam į lietimosi tašką (žr. 14 skyrelį). Todėl ieškomojo apskritimo centras yra statmenyje duotai tiesei, nubrėžtame per duotą tašką ir nutolęs nuo duoto taško atstumu, lygiu spinduliui. Uždavins turi du sprendinius — du apskritimus, simetriškus vienas kitam duotos tiesės atžvilgiu (149 pav.).

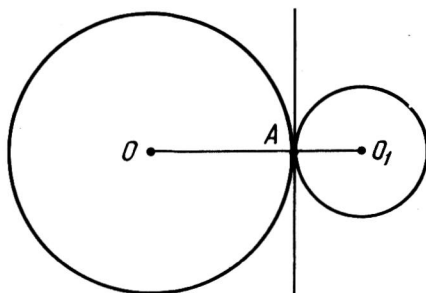
2 p a v y z d y s. Du apskritimai, kurių skersmenys yra 4 cm ir 8 cm, liečiasi iš išorės. Kam lygus atstumas tarp tų apskritimų centrų?

S p r e n d i m a s. Apskritimų spinduliai OA ir O_1A statmeni bendrai liestinei, einančiai per tašką A (150 pav.). Todėl $OO_1 = OA + AO_1 = 6$ cm.

15. Trikampiai. *Trikampiu* vadiname figūrą, kurią sudaro trys taškai, nepriklausantys vienai tiesei, ir trys atkarpos, jungiančios kiekvienus du iš tų taškų. Tuos tris taškus vadiname trikampio *viršūnėmis*, o atkarpas — jo *kraštinėmis*. Trikampį žymime, nurodymami jo viršūnes. Vietoj žodžio „trikampis“ rašome ženklą Δ .



149 pav.



150 pav.

151 paveiksle pavaizduotas trikampis ABC ; A , B , C — to trikampio viršūnės; AB , BC ir AC — jo kraštinės.

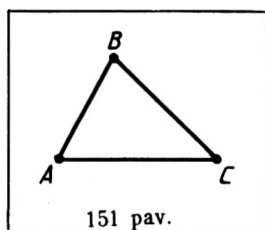
Trikampio ABC kampų prie viršūnės A vadiname kampą, kurį sudaro pusiesės AB ir AC . Panašiai apibrėžiami to trikampio kampai prie viršūnių B ir C .

1.12 t. | Jei tiesė, neinanti per trikampio viršūnę, kerta vieną jo kraštinę, tai ji kerta tik vieną iš kitų dviejų kraštinių.

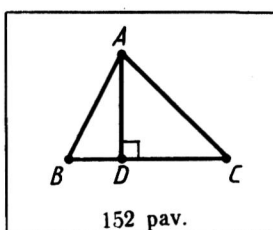
Trikampio aukštine vadiname statmenį, išvestą iš trikampio viršūnės į tiesę, kurioje yra prieš viršūnę esanti kraštinė. 152 paveiksle atkarpa AD yra trikampio ABC aukštinė.

Trikampio pusiaukampinė vadiname trikampio kampo pusiaukampinės atkarpą, kuri jungia trikampio viršūnę su prieš ją esančios kraštinės tašku. 153 paveiksle atkarpa AD yra trikampio ABC pusiaukampinė.

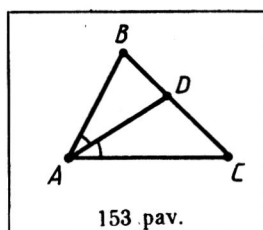
Trikampio pusiaukraštinė vadiname atkarpą, kuri jungia trikampio viršūnę su prieš ją esančios kraštinės viduriu. 154 paveiksle atkarpa AD yra trikampio ABC pusiaukraštinė.



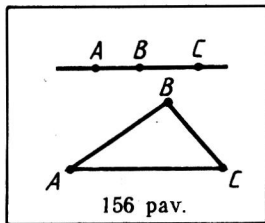
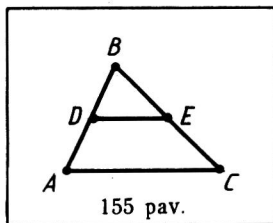
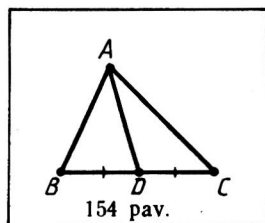
151 pav.



152 pav.



153 pav.



Trikampio vidurinė linija vadiname atkarpą, kuri jungia dviejų jo kraštinių vidurio taškus.

1.13 t. | Trikampio vidurinė linija yra lygiagreti trečiajai kraštinei ir lygi jos pusei.

Sakykime, DE yra trikampio ABC vidurinė linija (155 pav.). Teorema teigia, kad $DE \parallel AC$ ir $DE = \frac{1}{2} AC$.

Trikampio nelygybė vadiname atstumų tarp trijų taškų savybę, nusakomą šia teorema:

1.14 t. | Atstumas tarp dviejų taškų ne didesnis už sumą atstumų nuo tų taškų iki bet kurio trečio taško.

Sakykime, A, B, C — duoti taškai. Tų taškų tarpusavio padėties gali būti įvairios.

a) Jei du taškai arba visi trys taškai sutampa, tai teoremos teiginys savaime aiškus.

b) Jei visi taškai yra skirtingi ir priklauso vienai tiesei (156 pav.), tai kuris nors taškas, pavyzdžiui, B yra tarp kitų dviejų. Tada $AB + BC = AC$. Iš šios lygybės aišku, kad bet kuris iš tų atstumų ne didesnis už kitų dviejų atstumų sumą.

c) Jei tie trys taškai nepriklauso vienai tiesei (žr. 156 pav.), tai galima įrodyti, kad $AB < AC + BC$.

Pastaruoju atveju taškai A, B, C yra trikampio viršūnės. Todėl kiekviena trikampio kraštinė yra mažesnė už kitų dviejų kraštinių sumą.

1 p a v y z d y s. Ar egzistuoja trikampis ABC , kurio kraštinės lygios: a) $AB = 5$ cm, $AC = 18$ cm, $BC = 12$ cm; b) $AB = 7$ cm, $AC = 8$ cm, $BC = 12$ cm?

S p r e n d i m a s. Remiantis trikampio nelygybe,

$$AB < AC + BC, \quad (1)$$

$$AC < AB + BC, \quad (2)$$

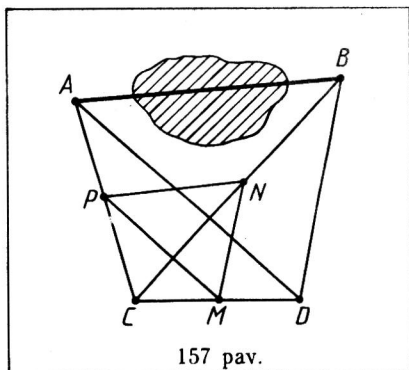
$$BC < AB + AC. \quad (3)$$

a) atveju (2) nelygybė neteisinga, todėl tokios taškų padėties negali būti; b) atveju (1) — (3) nelygybės teisingos, ir reikią trikampį nubraižyti nesunku (žr. 22 skyrelį).



2 pavyzdys. Raskite atstumą tarp punktų A ir B , atskirtų kliūtimi.

Sprendimas. Nužymime bazę CD ir išvedame tieses BC ir AD (157 pav.). Randame tašką M — atkarpos CD vidurį. Vedame $MN \parallel BD$ ir $MP \parallel AD$. Jungiame taškus P ir N ir išmatuojame PN . Ieškomas atstumas $AB = 2PN$.



16. Trikampių lygumas. *Lygiomis atkarpomis* vadiname atkarpas, kurios yra vienodo ilgio. *Lygiais kampais* vadiname kampus, kurie yra vienodo laipsninio mato.

Trikampius ABC ir $A_1B_1C_1$ vadiname *lygiais*, kai

$$AB = A_1B_1, BC = B_1C_1, AC = A_1C_1,$$

$$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1.$$

Trumpai tą patį pasakome šitaip: trikampius, kurių atitinkamos kraštinės lygios ir atitinkami kampai lygūs, vadiname lygiais.

Suformuluosime *pagrindinę lygių trikampių egzistavimo sąlybą* (trikampio, lygaus duotajam, egzistavimo aksiomą).

A—IV₃. Kad ir koks būtų trikampis, yra jam lygus trikampis, kurio padėtis duotos pusiesės atžvilgiu yra iš anksto nurodyta.

Teisingi tokie trys trikampių lygumo požymiai.

1.15 t. Jei vieno trikampio dvi kraštinės, ir kampas tarp jų atitinkamai lygūs kito trikampio dviem kraštinėms ir kampui tarp jų, tai tie trikampiai lygūs (*trikampių lygumo požymis pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų*).

1.16 t. Jei vieno trikampio kraštinė ir prie jos esantys kampai atitinkamai lygūs kito trikampio kraštinei ir prie jos esantiems kampams, tai tie trikampiai lygūs (*trikampių lygumo požymis pagal kraštinę ir prie jos esančius kampus*).

1.17 t. Jei visos vieno trikampio kraštinės atitinkamai lygios kito trikampio kraštinėms, tai tie trikampiai lygūs (*trikampių lygumo požymis pagal tris kraštines*).



P a v y z d y s. Taškai B ir D yra skirtingose pusplokštumėse tiesės AC atžvilgiu (158 pav.). Yra žinoma, kad $\angle BCA = \angle DAC$ ir $\angle DCB = \angle BAD$. Įrodykite, kad $\triangle ABC = \triangle CDA$.

S p r e n d i m a s. Iš sąlygos žinome, kad $\angle BCA = \angle DAC$. Todėl $\angle BAC = \angle DCA$, nes šie kampai gaunami atėmus iš lygių kampų BCD ir DAB lygius kampus BCA ir DAC . Be to, minėtų trikampių kraštinė AC bendra. Taigi šie trikampiai lygūs pagal kraštinę ir prie jos esančius kampus (1.16 t.).

17. Lygiašonis trikampis. *Lygiašonių trikampių* vadiname trikampį, turintį dvi lygias kraštines. Lygiašias kraštines vadiname jo *šoninėmis kraštinėmis*, o trečiąją kraštinę — lygiašonio *trikampio pagrindu*.

Trikampio ABC (159 pav.) $AB = CB$. Taigi trikampis ABC — lygiašonis, jo pagrindas — kraštinė AC .

1.18 t. | Lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo lygūs.

1.19 t. | Jei trikampis turi du lygius kampus, tai jis yra lygiašonis (*teorema, atvirkštinė 1.18 teoremai*).

1.20 t. | Lygiašonio trikampio pusiaukraštinė, nubrėžta į pagrindą, yra ir pusiaukampinė, ir aukštinė.

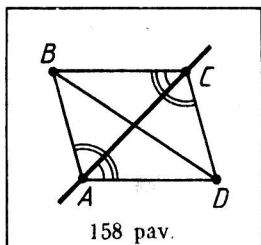
Vadinasi, lygiašonio trikampio aukštinė, nuleista į pagrindą, yra ir pusiaukraštinė, ir pusiaukampinė. Panašiai lygiašonio trikampio pusiaukampinė, nubrėžta iš viršūnės, esančios prieš pagrindą, yra ir pusiaukraštinė, ir aukštinė.

Trikampį, kurio visos kraštinės lygios, vadiname *lygiakraščiu*.

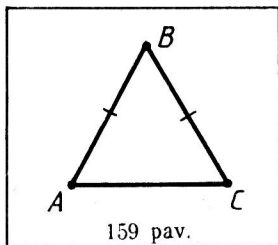
P a v y z d y s. Trikampio ADB kampas D lygus 90° . Kraštinės AD tęsinyje atidėta atkarpa $DC = AD$ (taškas D yra tarp taškų A ir C) (160 pav.). Įrodykite, kad trikampis ABC lygiašonis.

S p r e n d i m a s. Nagrinėkime trikampius ADB ir CDB . Turime, kad $AD = CD$, BD — bendra kraštinė, o $\angle BDA = \angle BDC = 90^\circ$. Todėl $\triangle ADB = \triangle CDB$ pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų.

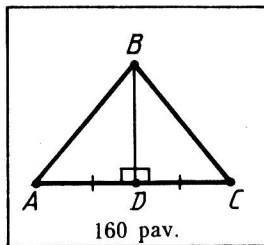
Kadangi trikampiai lygūs, tai $BC = AB$, t. y. $\triangle ABC$ lygiašonis.



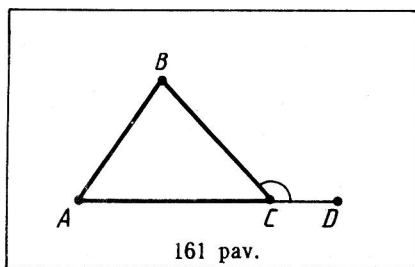
158 pav.



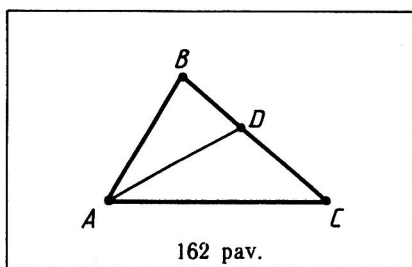
159 pav.



160 pav.



161 pav.



162 pav.

18. Trikampio kampų suma. Suformuluosime labai svarbią geometrijos teoremą — trikampio kampų sumos teoremą.

1.21 t. | Trikampio kampų suma lygi 180° .

Iš 1.21 teoremos išplaukia, kad kiekvienas trikampis turi bent du smailius kampus.

Trikampio priekampiu prie trikampio viršūnės vadiname kampą, gretutinį trikampio kampui prie tos viršūnės. Kampas BCD — trikampio ABC priekampis (161 pav.). Kad nepainiotume trikampio kampo su priekampiu prie tos pačios viršūnės, pirmąjį kartais vadiname *vidaus kampu*.

1.22 t. | Trikampio priekampis lygus jam negretutinių vidaus kampų sumai.

Iš 1.22 teoremos išplaukia, kad trikampio priekampis yra didesnis už bet kurį jam negretutinį vidaus kampą.

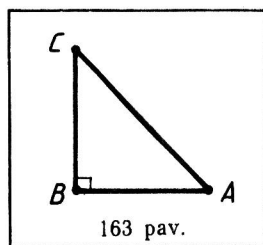
Pavyzdys. Trikampio ABC (162 pav.) $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 80^\circ$. Pusiaukampinė AD atkerta nuo jo trikampį ACD . Raskite to trikampio kampus.

Sprendimas. $\angle DAB = 30^\circ$, nes AD — kampo A pusiaukampinė (žr. 15 skyrelį). $\angle ADC = 30^\circ + 80^\circ = 110^\circ$ kaip trikampio ABD priekampis (1.22 teorema). Pritaikę trikampio ACD kampų sumos teoremą (1.21 teorema), gauname: $\angle C = 180^\circ - (110^\circ + 30^\circ) = 40^\circ$.

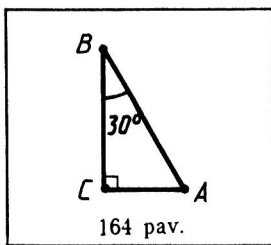
19. Statusis trikampis. Pitagoro teorema. *Stačiuoju trikampiu* vadiname trikampį, turintį statų kampą. Kadangi trikampio kampų suma lygi 180° , tai statusis trikampis turi tik vieną statų kampą. Kiti du stačiojo



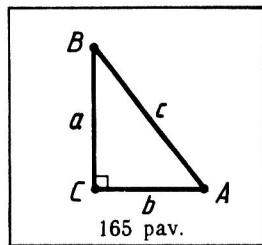
Pitagoras



163 pav.



164 pav.



165 pav.

trikampio kampai yra smailūs. Smailieji kampai papildo vienas kitą iki 90° . Stačiojo trikampio kraštinę, esančią prieš statųjį kampą, vadiname *įžambine*, o kitas dvi kraštines — *statiniais*. 163 paveiksle pavaizduotas trikampis yra statusis, $\angle B$ status, CA — įžambinė, CB ir BA — statiniai.

Nagrinėjant stačiuosius trikampus, galima taikyti bendruosius trikampių lygumo požymius. Yra ir specialių požymių.

- 1.23 t. | Jei vieno stačiojo trikampio įžambinė ir smailusis kampas yra atitinkamai lygūs kito trikampio įžambinei ir smiliajam kampui, tai tie trikampiai lygūs (*lygumo požymis pagal įžambinę ir smailųjį kampą*).
- 1.24 t. | Jei stačiojo trikampio statinis ir prieš jį esantis kampas yra atitinkamai lygūs kito trikampio statiniui ir prieš jį esančiam kampui, tai tie trikampiai lygūs (*lygumo požymis pagal statinį ir prieš jį esantį kampą*).
- 1.25 t. | Jei vieno stačiojo trikampio įžambinė ir statinis yra atitinkamai lygūs kito trikampio įžambinei ir statiniui, tai tie trikampiai lygūs (*lygumo požymis pagal įžambinę ir statinį*).

Stačiojo trikampio statinis, esantis prieš 30° kampą, lygus pusei įžambinės.

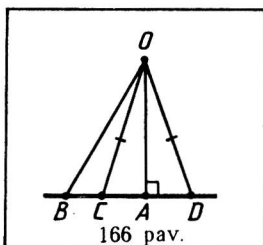
Trikampio ABC kampas C — status, $\angle B = 30^\circ$ (164 pav.). Todėl $CA = \frac{1}{2} AB$.

VI a. p. m. e. senovės graikų matematikas *P i t a g o r a s* įrodė teoremą, kurią vadiname *Pitagoro teorema*.

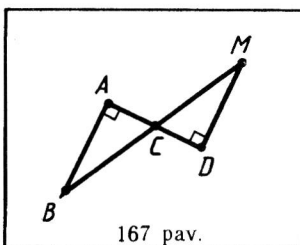
- 1.26 t. | Stačiojo trikampio įžambinės kvadratas lygus statinių kvadratų sumai.

Sakykime, ABC — statusis trikampis, C — status kampas, a ir b — statiniai, c — įžambinė (165 pav.). Teorema tvirtina, kad $a^2 + b^2 = c^2$.

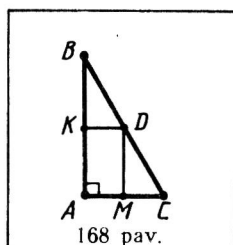
Iš Pitagoro teoremos išplaukia, kad bet kuris stačiojo trikampio statinis yra mažesnis už įžambinę.



166 pav.



167 pav.



168 pav.

Remdamiesi Pitagoro teorema, darome tokią išvadą: iš vieno taško nubrėžus į tiesę statmenį ir pasvirąjį, pasvirąjį bus didesnė už statmenį; lygios pasvirošios turi lygias projekcijas; iš dviejų pasvirųjų didesnė yra ta, kurios projekcija didesnė.

166 paveiksle iš taško O į tiesę a nuleistas statmuo OA ir išvestos pasvirošios OB , OC ir OD , $OC=OD$, o $OB>OC$. Remiantis pastarąja išvada: a) $OA<OB$, $OA<OC$, $OA<OD$; b) $AC=AD$, nes $OC=OD$; c) $AB>AC$, nes $OB>OC$.

1 pavyzdys. 167 paveiksle pavaizduoti trikampiai ABC ir DMC , $AB=MD$, $AB\perp AC$, $MD\perp CD$. Įrodykite, kad tie trikampiai lygūs.

Sprendimas. $AB=DM$ ir $\angle BAC=\angle MDC=90^\circ$, — žinome iš sąlygos, o $\angle BCA=\angle MCD$ kaip kryžminiai (1.4 teorema). Trikampiai ABC ir DMC lygūs pagal statinį ir prieš jį esantį kampą.

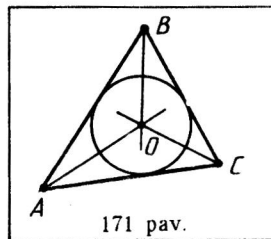
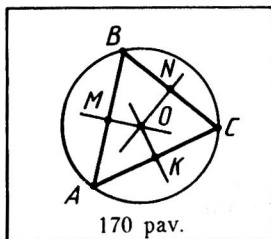
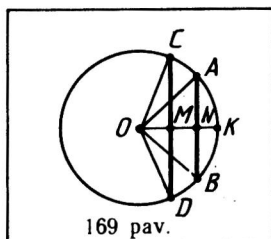
2 pavyzdys. Per stačiojo trikampio įžambinės vidurį nubrėžtos tiesės, lygiagrečios jo statiniams. Raskite gauto stačiakampio perimetrą, kai trikampio statiniai lygūs 10 cm ir 8 cm.

Sprendimas. Trikampio ABC (168 pav.) $\angle A$ status, $AB=10$ cm, $AC=8$ cm, KD ir MD — trikampio ABC vidurinės linijos. Todėl $KD=\frac{1}{2}AC=4$ cm, $MD=\frac{1}{2}AB=5$ cm (1.13 teorema). Stačiakampio $KDMA$ perimetras lygus 18 cm.

3 pavyzdys. Apskritimo spindulys lygus 25 cm. Vienoje jo centro pusėje nubrėžtos dvi lygiagrečios stygos, kurių ilgiai 40 cm ir 30 cm. Raskite atstumą tarp tų stygų.

Sprendimas. Nubrėžkime spindulį OK , statmeną stygomis AB ir CD , ir sujunkime apskritimo centrą O su taškais C , A , D ir B (169 pav.). Trikampiai COD ir AOB lygiašoniai, nes $OC=OD$ ir $OA=OB$ (kaip spinduliai). OM ir ON — tų trikampių aukštinės. Remiantis 1.20 teorema, kiekviena iš jų yra taip pat atitinkamo trikampio pusiaukraštinė, todėl $DM=MC$ ir $BN=NA$.

Trikampiai OCM ir OAN statūs, $OC=OA=25$ cm, $CM=20$ cm, $AN=15$ cm. ON ir OM randame pagal Pitagoro teoremą (1.26 teorema): $ON=\sqrt{25^2-15^2}=20$ cm, $OM=\sqrt{25^2-20^2}=15$ cm. Todėl $MN=ON-OM=5$ cm.



20. Įbrėžtinis ir apibrėžtinis apskritimas. *Apibrėžtu apie trikampį* apskritimu (*apibrėžtiniu* apskritimu) vadiname apskritimą, kuris eina per visas trikampio viršūnes.

1.27 t. | Apie trikampį apibrėžto apskritimo centras yra taškas, kuriame susikerta tiesės, statmenos trikampio kraštinėms ir einančios per kraštinių vidurio taškus.

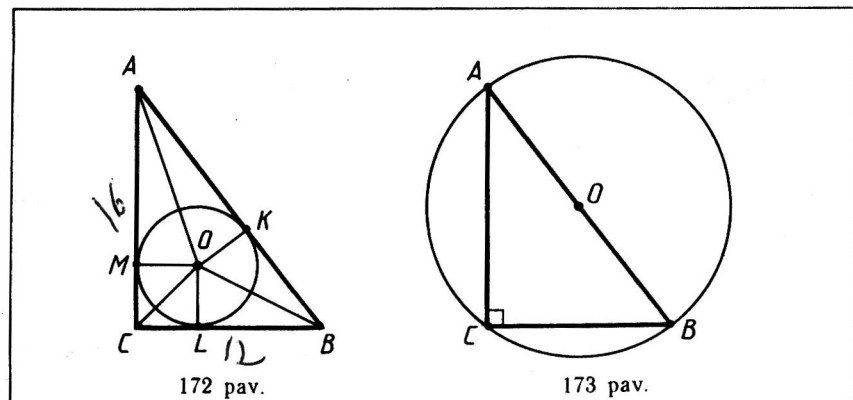
Kitaip sakant, apibrėžto apie trikampį apskritimo centras sutampa su trikampio kraštinių vidurio statmenų susikirtimo tašku.

170 paveiksle apskritimas apibrėžtas apie trikampį ABC . To apskritimo centras O yra kraštinių AB , BC ir CA vidurio statmenų OM , ON ir OK susikirtimo taškas.

Įbrėžtu į trikampį apskritimu (*įbrėžtiniu* apskritimu) vadiname apskritimą, kuris liečia visas trikampio kraštines.

1.28 t. | Į trikampį įbrėžto apskritimo centras yra to trikampio pusiaukampinių susikirtimo taškas.

171 paveiksle apskritimas įbrėžtas į trikampį ABC . To apskritimo centras O yra trikampio pusiaukampinių AO , BO ir CO susikirtimo taškas.





P a v y z d y s. Stačiojo trikampio statiniai lygūs 12 cm ir 16 cm. Apskaičiuokite: 1) įbrėžtinio apskritimo spindulį; 2) apibrėžtinio apskritimo spindulį.

S p r e n d i m a s. 1). Trikampio ABC $\angle C = 90^\circ$, $BC = 12$ cm, $AC = 16$ cm, O — įbrėžtinio apskritimo centras (172 pav.). Trikampio ABC perimetras lygus dvigubos įžambinės ir įbrėžtinio apskritimo skersmens sumai (remiantis apskritimo liestinės apibrėžimu ir stačiųjų trikampių AOM ir AOK , MOC ir LOC lygumu pagal įžambinę ir statinį): $AB + BC + AC = 2AB + 2r$. Vadinas, $2r = AB + BC + AC - 2AB = BC + AC - AB$. Remiantis Pitagoro teorema (1.26 teorema), $AB = 20$ cm. Todėl $2r = 8$ cm, t. y. $r = 4$ cm.

2) Apie statųjį trikampį apibrėžto apskritimo centras sutampa su įžambinės viduriu. Iš trikampio ABC pagal Pitagoro teoremą (1.26 teorema) randame $AB = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$, todėl apibrėžtinio apskritimo spindulys $R = 10$ cm (173 pav.).

§ 3. Brėžimo uždaviniai

21. Braižymo įrankiai. Geometrijoje dažnai reikalaujama nubraižyti kurią nors figūrą braižymo įrankiais.

Kartais įrankiai, kuriais reikia braižyti, nurodomi uždaviniuose. Kai tokio nurodymo nėra, braižymo įrankius galima pasirinkti patiems.

Braižymui mokykloje naudojame liniuotę, skriestuvą, kampainį, matlankį.

Išsiaiškinsime, ką galima braižyti kiekvienu įrankiu.

Liniuote galima nubrėžti: a) bet kurią tiesę; b) tiesę, einančią per duotą tašką; c) tiesę, einančią per du duotus taškus.

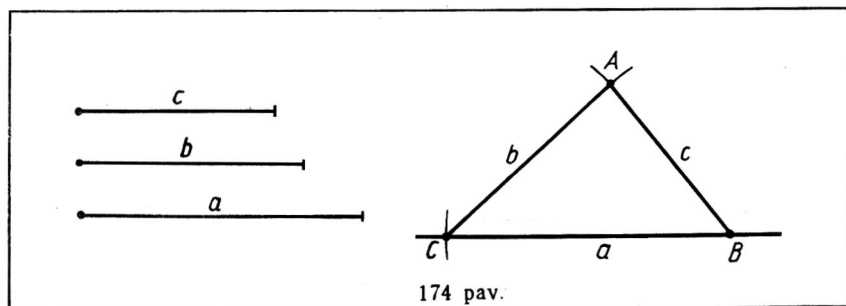
Liniuote negalima atidėti atkarpų, net kai ji turi padalas; negalima naudotis abiem liniuotės pusėmis.

Skriestuvu galima: a) nubrėžti apskritimą, kai duotas jo centras ir spindulys; b) duotoje tiesėje nuo duoto taško atidėti atkarpą, lygią duotai atkarpai.

Kampainiu galima naudotis kaip liniuote. Be to, vieną iš kampainio kraštinių galima sutapdinti su duota tiese ir brėžti tiesę išilgai kitos kampainio kraštinės. Kampainiu taip pat galima nubraižyti statųjį kampą.

11 skyrelyje (žr. 135 pav.) matėme, kaip kampainiu ir liniuote galima nubrėžti lygiagrečias tieses.

Matlankiu galima pažymėti tašką spindulyje, sudarančiame su duota tiese duotą kampą, kurio viršūnė yra duotame taške. 124 paveiksle (8 skyrelis) parodyta, kaip matlankiu nuo pustinės a viršutinėje pusplėkštumėje galima atidėti duoto laipsninio mato kampą.



Dažniausiai brėžimo uždaviniuose leidžiama naudotis skriestuvu ir liniuote (vienpuse ir be padalų).

22. Paprasčiausieji brėžimo uždaviniai. Visuose uždaviniuose naudosimės tik dviem braižymo įrankiais — liniuote ir skriestuvu.

Sprendami brėžimo uždavinį, visų pirma išsiaiškiname, kaip ir ką reikia braižyti, o tik po to brėžiame. Be to, svarbu mokėti įrodyti, kad braižydami taip, kaip siūlome, tikrai gausime figūrą, turinčią reikiamas savybes.

Išnagrinėsime paprasčiausius brėžimo uždavinius.

1 uždavinys. Nubraižykite trikampį, kai duotos jo kraštinės a , b ir c .

Trikampis ABC (174 pav.) nubraižytas taip: liniuote nubrėžėme tiesę, o skriestuvu — tris apskritimus, iš centro B spinduliu $BC=a$, iš centro B spinduliu $BA=c$, iš centro C spinduliu $CA=b$.

Kad uždavinys turėtų sprendinį, trikampio kraštinės a , b , c turi tenkinti sąlygas (žr. 15 skyrelį):

$$a < b + c, b < a + c, c < a + b.$$

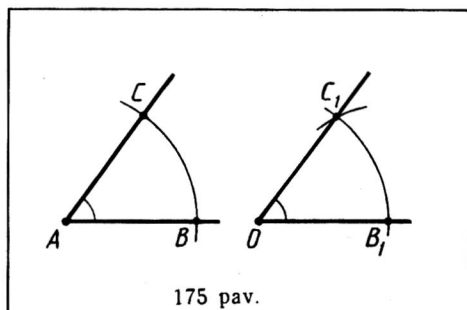
2 uždavinys. Nubraižykite kampą, lygų duotam kampui.

Remiantis geometrijos aksioma, A—IV₂ (žr. 8 skyrelį), prie kiekvienos pus tiesės nurodytoje pusplokštumėje galima atidėti kampą, lygų duotam kampui. Kaip tai atlikti skriestuvu ir liniuote?

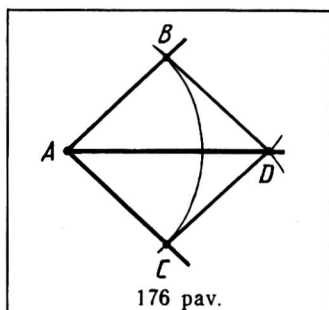
175 paveiksle nubraižyta taip: $\angle A$ — duotas kampas, OB_1 — duota pus tiesė. Iš centrų A ir O brėžėme du bet kurio vienodo spindulio apskritimus ir iš centro B_1 spindulio BC apskritimą. Tada $\angle A = \angle O$ pagal trečiąjį trikampių lygumo požymį (1.17 teorema).

3 uždavinys. Nubrėžkite duoto kampo pusiau kampinę.

176 paveiksle duoto kampo BAC pusiau kampinė nubrėžta taip: iš centrų A , B ir C brėžėme tris bet kurio vienodo spindulio apskritimus. Apskritimų, kurių centrai yra taškuose B ir C , susikir-



175 pav.



176 pav.

timo tašką D sujungėme su tašku A . Pustiesė AD — kampo BAC pusiaukampinė, nes trikampiai ABD ir ACD lygūs pagal trečiąjį trikampių lygumo požymį (1.17 teorema).

4 uždavinys. *Padalykite atkarpą pusiau.*

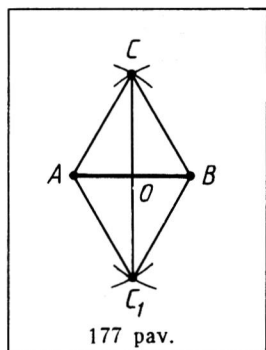
177 paveiksle atkarpos AB vidurys rastas taip: iš centrų A ir B nubrėžėme du spindulio AB apskritimus. Taškai C ir C_1 yra skirtingose pusplokštumėse, todėl atkarpa CC_1 kerta AB , taškas O — atkarpos AB vidurys.

Irodymas išplaukia iš trikampių lygumo: $\triangle CAC_1 = \triangle CBC_1$ (1.17 teorema), $\triangle ACO = \triangle BCO$ (1.15 teorema).

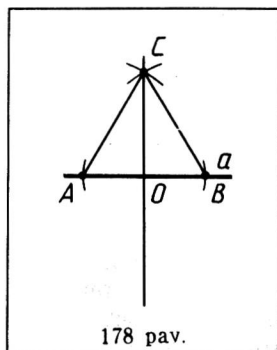
5 uždavinys. *Per tašką O nubrėžkite tiesę, statmeną tiesei a .*

Reikia išnagrinėti du atvejus.

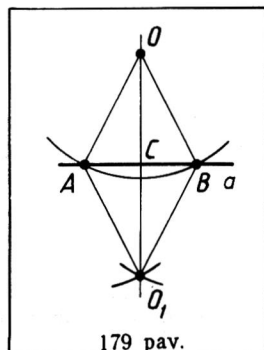
1) Taškas O priklauso tiesei a . Kaip reikia brėžti, pavaizduota 178 paveiksle. Nubrėžėme tris apskritimus: iš centro O bet kurio spindulio apskritimą (jis kerta tiesę a taškuose A ir B), iš centrų A ir B spindulio AB apskritimą. Dviejų pastarųjų apskritimų susikirtimo tašką C sujungiame su tašku O . Tiesė OC — ieškojami.



177 pav.



178 pav.



179 pav.



Tiesių statmenumas išplaukia iš trikampio ACO ir BCO lygumo (1.17 teorema).

2) Taškas O nepriklauso tiesei a . 179 paveiksle pavaizduotas brėžimas atliktas taip. Iš centro O brėžėme bet kurio spindulio apskritimą, A ir B — apskritimo ir tiesės a susikirtimo taškai. Iš centrų A ir B brėžėme to paties spindulio apskritimus, O_1 — jų susikirtimo taškas, esantis su tašku O skirtingose pusplokštumėse.

Tiesė OO_1 — ieškomoji. Įrodysime tai:

- 1) $\triangle AOB = \triangle AO_1B$ (1.17 teorema), todėl $\angle OAC = \angle O_1AC$.
- 2) $\triangle AOC = \triangle AO_1C$ (1.15 teorema), todėl $\angle ACO = \angle ACO_1$.
- 3) $\angle ACO$ ir $\angle ACO_1$ — gretutiniai. Lygūs gretutiniai kampai yra statūs. Todėl OC — statmuo, nuleistas iš taško O į tiesę a .

Išnagrinėti uždaviniai taikomi sprendžiant sudėtingesnius brėžimo uždavinius.

P a v y z d y s. Nubrėžkite duoto spindulio apskritimą, kuris liečia duotą tiesę ir eina per duotą tašką, nepriklausantį tai tiesei.

S p r e n d i m a s. Tarkime, kad uždavinys išspręstas, t. y. iš centro O nubrėžtas spindulio R apskritimas, kuris liečia tiesę a ir eina per tašką M (180 pav.). Apskritimo centras yra tiesėje, lygiagrečioje tiesei a . Tiesė b nutolusi nuo a atstumu R , o taškas O yra apskritimo, nubrėžto iš centro M tuo pačiu spinduliu, ir tiesės b susikirtimo taškas.

Brėžiame tokia tvarka:

- 1) Brėžiame tiesę b , lygiagrečią tiesei a ir nutolusią nuo a atstumu R .

- 2) Iš centro M spinduliu R brėžiame apskritimą.

Tiesės b ir nubrėžto apskritimo susikirtimo taškas O — ieškomojo apskritimo centras. Iš tikrųjų, iš taško O spinduliu R nubrėžtas apskritimas liečia tiesę a ir eina per tašką M . Uždavinys gali turėti du sprendinius, vieną sprendinį arba neturėti sprendinių. (Išsinagrinėkite skirtingus atvejus. 180 paveiksle pavaizduotas dviejų sprendinių atvejis.)

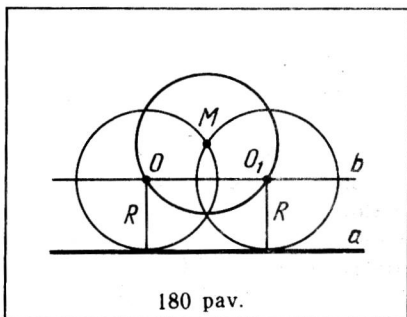
23. Geometrinė taškų vieta. *Geometrinė taškų vieta* vadiname figūrą, sudarytą iš visų plokštumos taškų, turinčių tam tikrą savybę.

Svarbią geometrinę taškų vietą nusako tokia teorema.

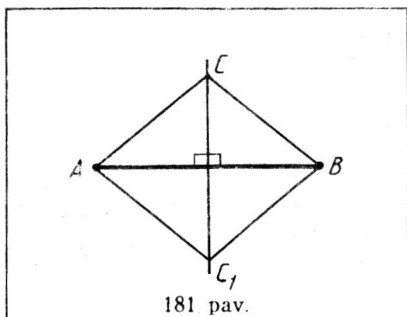
- 1.29 t.** | Taškų, vienodai nutolusių nuo dviejų duotų taškų, geometrinė vieta yra tiesė, statmena tuos taškus jungiančiai atkarpai ir einanti per tos atkarpos vidurį.

Atkarpos AB vidurio statmuo CC_1 (181 pav.). 1.29 teorema tvirtina, kad: a) kiekvienas tiesės CC_1 taškas vienodai nutolęs nuo taškų A ir B ; b) kiekvienas plokštumos taškas, vienodai nutolęs nuo taškų A ir B , priklauso tiesei CC_1 .

Nurodysime kelias geometrines taškų vietas.



180 pav.



181 pav.

1. Taškų, nutolusių nuo duoto taško duotu atstumu, geometrinė vieta yra apskritimas, kurio centras yra duotasis taškas, o spindulys lygus duotajam atstumui.
2. Taškų, nutolusių nuo duotos tiesės duotu atstumu, geometrinę vietą sudaro dvi tiesės, lygiagrečios duotajai tiesei ir nutolusios nuo jos duotojo atstumu.
3. Taškų, vienodai nutolusių nuo dviejų susikertančių tiesių, geometrinę vietą sudaro tų tiesių sudaromų kampų pusiaukampinės.
4. Taškų, iš kurių atkarpa AB matoma duotoju kampu ir kurie yra vienoje tiesės AB pusėje, geometrinė vieta — apskritimo lankas, kurio galai yra taškai A ir B .

Sprendžiant brėžimo uždavinius, geometrinių vietų metodus taikomas šitaip.

Sakykime, reikia rasti tašką X , atitinkantį dvi sąlygas. Taškų, atitinkančių pirmąją sąlygą, geometrinė vieta yra figūra F_1 , o taškų, atitinkančių antrąją sąlygą, geometrinė vieta yra figūra F_2 . Ieškomasis taškas X priklauso ir figūrai F_1 , ir figūrai F_2 , t. y. jis yra šių figūrų susikirtimo taškas.

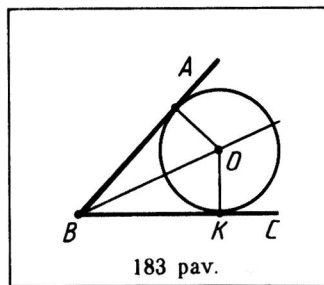
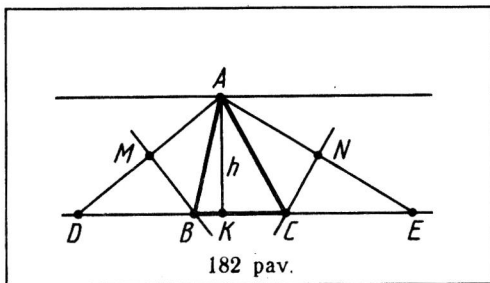
1 p a v y z d y s. Nubraižykite trikampį, kai duotas jo perimetras p , vienas iš kampų α ir aukštinė h .

S p r e n d i m a s. Sakykime, uždavinys išspręstas ir trikampis ABC nubraižytas (182 pav.).

Atidėkime atkarpą DB , lygią atkarpai AB , ir atkarpą CE , lygią atkarpai AC . Trikampiai ABD ir ACE yra lygiašoniai.

Atlikti brėžimą galima tokia tvarka.

- 1) Brėžiame tiesę ir joje atidedame atkarpą DE , lygią p .
- 2) Atstumu h nuo tiesės DE brėžiame tiesę, lygiagrečią tiesei DE .



3) Braižome kampą ADE , lygų $\frac{\alpha}{2}$. Taškas A — viena iš ieškomojo trikampio viršūnių.

4) Brėžiame atkarpų AD ir AE vidurio statmenis. Jie kerta tiesę DE taškuose B ir C . Tie taškai — dvi kitos ieškomojo trikampio viršūnės.

Irodysime, kad $\triangle ABC$ — ieškomasis. Iš tikrųjų, trikampio ABC aukštinė lygi h (taip brėžime), $\angle ABC = 2\angle ADB = \alpha$ ($\triangle ABD$ lygiašonis, $\angle ABC$ — to trikampio priekampis, žr. 1.22 teoremą), $AB + BC + CA = p$ (taip braižime).

2 p a v y z d y s. Nubrėžkite apskritimą, kuris liečia duotojo kampo kraštines, ir vieną iš jų duotame taške K .

S p r e n d i m a s. Sakykime, uždavinys išspręstas ir ieškomas apskritimas nubrėžtas. Viena vertus, jo centras O priklauso duoto kampo pusiaukampinei, o kita vertus — statmeniui KO , iškeltam tiesei BC iš duoto taško K (183 pav.).

Apskritimas, kurio centras O , liečia duoto kampo kraštines, ir vieną iš jų duotame taške K .

Braižyti galima taip.

1) Brėžiame kampo ABC pusiaukampinę BD .

2) Iš taško K iškeliamo statmenį KL kampo ABC kraštinei BC .

3) Iš KL ir BD susikirtimo taško O , kaip iš centro, spinduliu OK brėžiame apskritimą. Nubrėžtas apskritimas — ieškomasis.

Matematikų visuomet domino tokie klausimai:

Ar kiekvieną brėžimo uždavinį galima išspręsti skriestuvu ir liniuote?

Kokius brėžimo uždavinius galima išspręsti tik liniuote?

Kokius brėžimo uždavinius galima išspręsti tik skriestuvu?

Trumpai aptarsime šiuos klausimus.

1672 m. danų matematikas Georgas Moras, o po to nepriklausomai nuo jo 1797 m. italų matematikas Lorencas Maskeronis įrodė tokį teiginį: kiekvieną brėžimo uždavinį, kurį galima išspręsti skriestuvu ir liniuote, galima išspręsti vienu skriestuvu. Tie brėžimo uždaviniai vadinami Moro—Maskeronio brėžimo uždaviniais.

Sveicarų geometras Jakobas Steineris 1833 m., o kiek anksčiau prancūzų matematikas Ž. Ponselė nepriklausomai vienas nuo kito įrodė



tokį teiginį: kiekvieną brėžimo uždavinį, kurį galima išspręsti skriestuvu ir liniuote, galima išspręsti liniuote, jei brėžinio plokštumoje nubrėžtas apskritimas ir nurodytas jo centras. Tokie brėžimo uždaviniai vadinami Ponselė—Steinerio brėžimo uždaviniais.

Yra brėžimo uždavinių, kurių negalima išspręsti skriestuvu ir liniuote.

1) *Kampo trisekcijos* uždavinys. Duotas kampas α . Nubraižykite kampą $\frac{1}{3}\alpha$.

2) *Kubo dvigubtinimo* uždavinys. Duotas kubas (t. y. duota atkarpa, lygi kubo briaunai). Nubraižykite kitą kubą, kurio tūris dvigubai didesnis už duotojo kubo tūrį (t. y. nubrėžkite tokio kubo briauną).

3) *Skritulio kvadratinės* uždavinys. Duotas skritulys. Nubraižykite kvadratą, lygiaplotį su tuo skrituliu.

Šių uždavinių neišsprendžiamumo įrodymas remiasi giliais matematikos faktais. Skyrinyje „Dekartinės koordinatės“ išnagrinėsime geometrijos uždavinių analizinį sprendimo metodą, kai uždavinys išverčiamas į formulių kalbą. Įrodyta, kad jeigu geometrinę figūrą, kurią norime nubraižyti, galima išreikšti formule, į kurią įeina tik racionaliosios funkcijos ir kvadratinės šaknies traukimo veiksmas, tai ją galima nubraižyti skriestuvu ir liniuote.

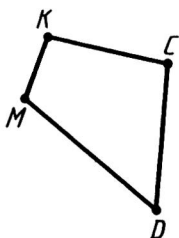
II SKYRIUS. DAUGIAKAMPIAI

§ 4. Keturkampiai

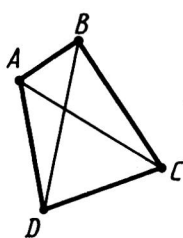
24. Išskilieji keturkampiai. *Keturkampiu* vadiname figūrą, kurią sudaro keturi taškai ir keturios nuosekliai juos jungiančios atkarpos. Čia turime galvoje, kad bet kurie trys iš tų taškų nepriklauso vienai tiesei, o juos jungiančios atkarpos nesusikerta. Tuos keturis taškus vadiname *keturkampio viršūnėmis*, o juos jungiančias atkarpas — *keturkampio kraštinėmis*.

Keturkampį žymime jo viršūnėmis. Pavyzdžiui, keturkampis *MKCD* (184 pav.).

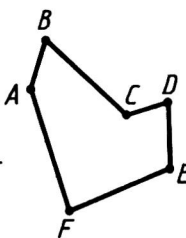
Gretimomis viršūnėmis vadiname keturkampio viršūnes, kurios yra vienos kraštinės galai. Negretimas viršūnes vadiname



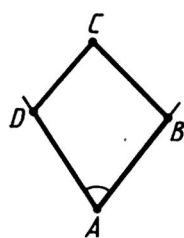
184 pav.



185 pav.



186 pav.



187 pav.



priešingomis. Atkarpos, jungiančias priešingąsias keturkampio viršūnes, vadiname jo *įstrižainėmis*. 185 paveiksle pavaizduoto keturkampio $ABCD$ viršūnės A ir B yra gretimos, o viršūnės B ir D — priešingos; įstrižainės yra atkarpos AC ir BD .

Keturkampio kraštinės, išeinančias iš vienos viršūnės, vadiname *gretimomis kraštinėmis*. Neturinčias bendro galo kraštinės vadiname *priešingomis kraštinėmis*. 185 paveiksle pavaizduoto keturkampio priešingos kraštinės yra AB ir DC , BC ir AD , o kraštinės AB ir AD yra gretimos.

Iškilioju keturkampiu (daugiakampiu) vadiname keturkampį (daugiakampį), esantį vienoje pusplokštumėje nuo kiekvienos tiesės, kurioje yra jo kraštinė. Čia laikoma, kad pati tiesė priklauso pusplokštumei, kurioje yra daugiakampis. Keturkampiai, kuriuos matome 184 ir 185 paveiksle, yra iškili; 186 paveiksle pavaizduotas neiškilasis daugiakampis.

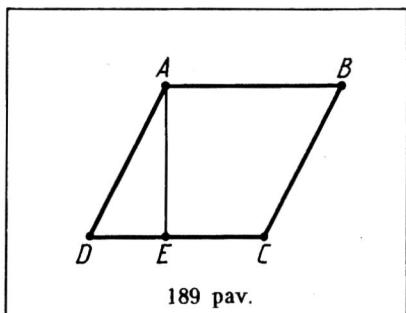
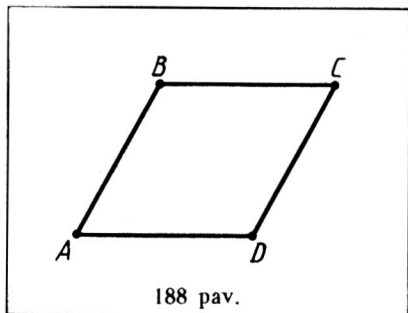
Toliau nagrinėsime tik iškiliuosius keturkampius. Iškiliojo keturkampio $ABCD$ *kampu* prie viršūnės A vadiname kampą, kurį sudaro pusinės AB ir AD . 187 paveiksle $\angle BAD$ — iškiliojo keturkampio kampas.

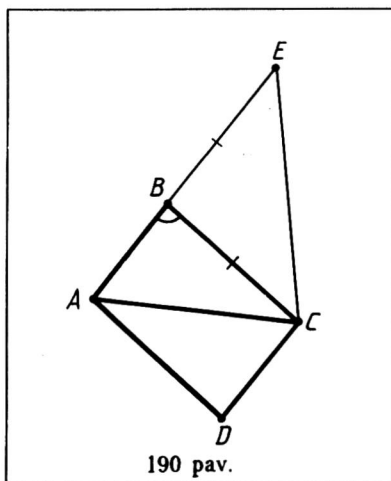
25. Lygiagretainis. *Lygiagretainiu* vadiname keturkampį, kurio priešingos kraštinės lygiagrečios, t. y. priklauso lygiagrečioms tiesėms. 188 paveiksle pavaizduotas keturkampis $ABCD$ yra lygiagretainis, kurio $AB \parallel CD$ ir $BC \parallel AD$. Galima įrodyti tokį *lygiagretainio požymį*.

2.1 t. | Jei keturkampio įstrižainės susikerta ir susikirtimo taškas jas dalija pusiau, tai tas keturkampis yra lygiagretainis.

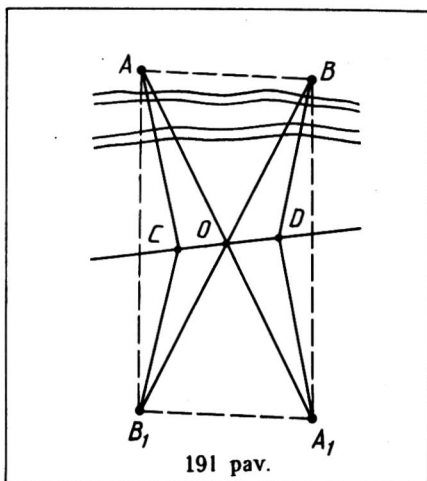
Suformuluosime atvirkštinę teoremą.

2.2 t. | Lygiagretainio įstrižainės susikerta, ir susikirtimo taškas jas dalija pusiau.





190 pav.



191 pav.

Lygiagretainio savybes nusako ir ši teorema.

- 2.3 t. | Lygiagretainio priešingosios kraštinės lygios, priešingieji kampai lygūs.

Sakykime, $ABCD$ — lygiagretainis. Iš viršūnės A nuleiskime statmenį AE į tiesę CD (189 pav.). Atkarpą AE vadiname *lygiagretainio aukštine*, atitinkančia kraštines AB ir CD .

1 p a v y z d y s. Lygiagretainio perimetras lygus 122 cm. Viena jo kraštinių 25 cm didesnė už kitą. Raskite lygiagretainio kraštines.

S p r e n d i m a s. Remiantis 2.3 teorema, priešingosios lygiagretainio kraštinės lygios. Vieną lygiagretainio kraštinę pažymėkime x , kitą y . Tada

$$\begin{cases} 2x + 2y = 122, \\ x - y = 25. \end{cases}$$

Išsprendę sistemą, randame $x = 43$, $y = 18$. Taigi lygiagretainio kraštinės 18 cm, 43 cm, 18 cm ir 43 cm.

2 p a v y z d y s. Nubraižykite lygiagretainį, kai duotas jo perimetras, įstrižainė ir prieš ją esantis kampas.

S p r e n d i m a s. Tarkime, kad uždavinys išspręstas, ir lygiagretainis $ABCD$ nubraižytas (190 pav.). Pradžioje AB ir atidėkime BE , lygią BC . Gavome trikampį ACE , kurio $\angle E = \frac{1}{2} \angle ABC$, nes BCE lygiašonis trikampis, o $\angle B$ — jo priekampis. Dabar užtenka nubraižyti trikampį ACE , kai duota jo kraštinė AC , kampas E ir kraštinė AE , lygi pusei lygiagretainio perimet-



ro. Po to braižome trikampį ABC ir papildome jį iki lygiagrečio.

3 p a v y z d y s. Raskite atstumą tarp nepasiekiamų taškų A ir B , remdamiesi lygiagrečio požymiu (2.1 teorema).

S p r e n d i m a s. Nužymime bazę CD (191 pav.). O — atkarpos CD vidurys. Pagal kraštinę ir du prie jos esančius kampus braižome trikampį A_1OD , lygų trikampiui AOC , ir trikampį B_1OC , lygų trikampiui BOD . Iš trikampių lygumo išplaukia, kad $AO = A_1O$ ir $BO = B_1O$. Kadangi keturkampio ABA_1B_1 įstrižainės AA_1 ir BB_1 taškas O dalija pusiau, tai gautasis keturkampis ABA_1B_1 yra lygiagretainis (2.1 teorema), t. y. $AB = A_1B_1$ (2.3 teorema). Dabar matuojame A_1B_1 .

26. Stačiakampis. Rombas. Kvadratas. *Stačiakampiu* vadiname lygiagretinį, kurio visi kampai statūs. 192 paveiksle pavaizduotas stačiakampis $ABCD$ ($\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$).

Galima įrodyti tokią stačiakampo savybę.

2.4 t. | Stačiakampo įstrižainės lygios.

Rombu vadiname lygiagretinį, kurio visos kraštinės lygios. 193 paveiksle pavaizduotas rombas $ABCD$ ($AB = BC = CD = AD$).

Galima įrodyti tokias rombo savybes.

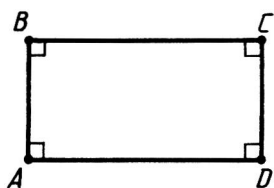
2.5 t. | Rombo įstrižainės susikerta stačiu kampu. Rombo įstrižainės yra jo kampų pusiaukampinės.

Kvadratu vadiname stačiakampį, kurio visos kraštinės lygios.

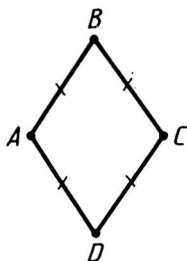
194 paveiksle pavaizduotas kvadratas $ABCD$. Kvadratas yra taip pat rombas, todėl turi ir stačiakampo, ir rombo savybes.

1 p a v y z d y s. Stačiakampo kraštinė lygi 4 cm. Su įstrižaine ji sudaro 60° kampą. Raskite tą įstrižainę.

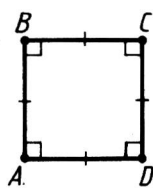
S p r e n d i m a s. $\triangle ABC$ — statusis, jo statinis $BC = 4$ cm, o $\angle BAC = 30^\circ$ (195 pav.). Pritaikę stačiojo trikampio statinio, esančio prieš 30° kampą, savybę, rašome: $BC = \frac{1}{2} AC$ (žr. 19 skyrelį). Todėl $AC = 8$ cm.



192 pav.



193 pav.



194 pav.

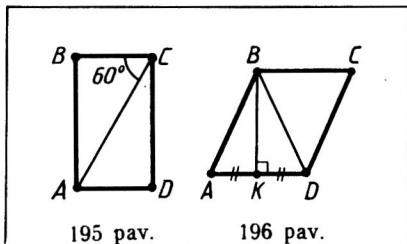


2 pavyzdys. Raskite rombo kampus, kai iš bukojo kampo viršūnės nuleisto statmens pagrindas rombo kraštinę dalija pusiau.

Sprendimas. Nagrinėkime trikampį ABD (196 pav.).

$AB=AD$ kaip rombo kraštinės; iš sąlygos žinome, kad aukštinė yra ir jo pusiaukraštinė. Todėl

tas trikampis lygiašonis ir tada, kai pagrindu laikome AD . Vadinasi, $AB=BD$. Įrodėme, kad $\triangle ABD$ lygiakraštis, taigi $\angle A=60^\circ$. Todėl rombo $ABCD$ $\angle A=\angle C=60^\circ$, $\angle B=\angle D=120^\circ$ (2.3 teorema).



27. Trapecija. Trapecija vadiname iškiląjį keturkampį, kuris turi tik dvi lygiagrečias priešingas kraštines. Tas lygiagrečias kraštines vadiname *trapecijos pagrindais*. Kitas dvi kraštines vadiname *šoninėmis kraštinėmis*.

197 paveiksle pavaizduota trapecija $ABCD$. Kraštinės BC ir AD — *trapecijos pagrindai*, AB ir CD — *trapecijos šoninės kraštinės*.

Trapeciją, kurios šoninės kraštinės lygios, vadiname *lygiašone*.

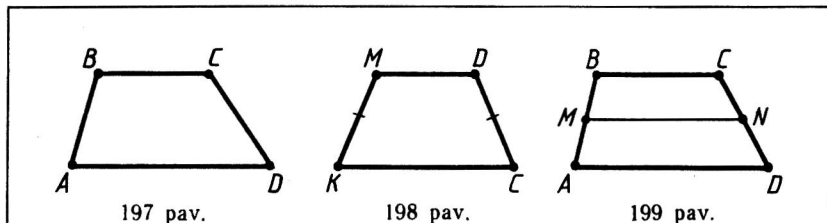
Trapecijos $KMDC$ (198 pav.) $KM=DC$, taigi ta trapecija lygiašonė.

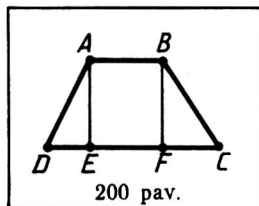
Atkarpą, kuri jungia šoninių kraštinių vidurio taškus, vadiname *trapecijos vidurine linija*.

199 paveiksle atkarpa MN yra trapecijos $ABCD$ vidurinė linija.

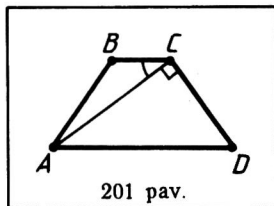
Suformuluosime teoremą, išreiškiančią trapecijos vidurinės linijos savybę.

2.6 t. Trapecijos vidurinė linija lygiagreti pagrindams ir lygi jų sumos pusei.

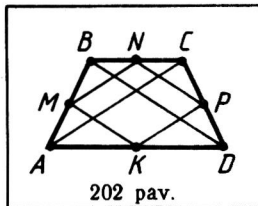




200 pav.



201 pav.



202 pav.

200 paveiksle pavaizduota trapecija $ABCD$. Iš taškų A ir B nuleisti statmenys AE ir BF į tiesę CD . Atkarpos AE ir BF lygios atstumui tarp lygiagrečių tiesių AB ir CD . Tą atstumą vadiname *trapecijos aukštine*.

1 p a v y z d y s. Lygiašonės trapecijos įstrižainė statmena jos šoninei kraštinei, o su pagrindu sudaro 15° kampą. Raskite trapecijos kampus.

S p r e n d i m a s. Kampai prie lygiašonės trapecijos pagrindų lygūs: $\angle ABC = \angle DCB$, $\angle BAD = \angle CDA$ (201 pav.); $\angle BCD = \angle BCA + \angle ACD = 15^\circ + 90^\circ = 105^\circ$, $\angle CDA = 180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$. Taigi kampai prie pagrindo BC lygūs po 105° , o kampai prie pagrindo AD lygūs po 75° .

2 p a v y z d y s. Įrodykite, kad lygiašonės trapecijos kraštinių vidurio taškai yra rombo viršūnės.

S p r e n d i m a s. Taškai M , N , P ir K — lygiašonės trapecijos $ABCD$ kraštinių AB , BC , CD ir DA vidurio taškai (202 pav.). Atkarpos MN ir KP lygiagrečios atkarpai AC ir lygios jos pusei kaip trikampių ABC ir ADC vidurinės linijos (1.13 teorema); panašiai MK ir NP lygiagrečios atkarpai BD ir lygios jos pusei. Todėl keturkampis $MNPK$ — lygiagretainis.

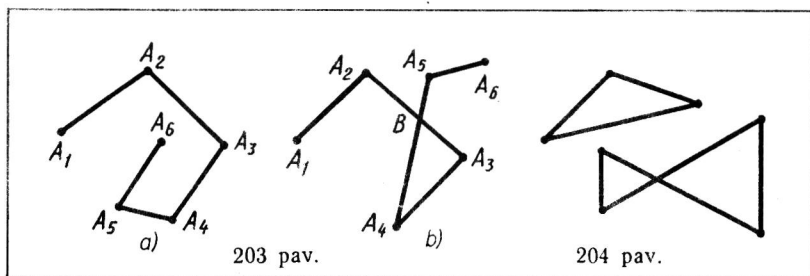
$\triangle ABD = \triangle DCA$ (1.15 teorema), MK ir PK — tų trikampių vidurinės linijos, todėl $MK = PK$. Panašiai $MN = NP$.

Taigi lygiagretainio $MNPK$ visos kraštinės lygios, ir jis yra rombas.

§ 5. Daugiakampiai

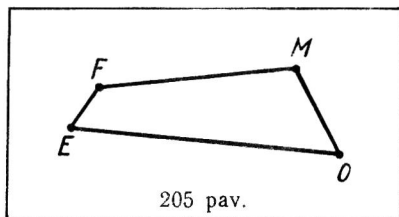
28. **Laužtė.** Laužtė $A_1A_2\dots A_n$ vadiname figūrą, sudarytą iš taškų $A_1, A_2, \dots, A_n$ ir juos jungiančių atkarpų $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$. Taškus $A_1, A_2, \dots, A_n$ vadiname *laužtės viršūnėmis*, o atkarpas $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ — *laužtės grandimis*. Paprastąją laužtę vadiname laužtę, neturinčią savikirtos taškų. 203a paveiksle pavaizduota paprastoji laužtė. 203b paveiksle pavaizduota laužtė turi savikirtos tašką.

Uždaroja laužtė vadiname laužtę, kurios galai sutampa. 204 paveiksle pavaizduotos uždarosios laužtės.



Laužtės ilgiu vadiname jos grandžių ilgių sumą.

2.7 t. | Laužtės ilgis ne mažesnis už jos galus jungiančios atkarpos ilgį.



Pavyzdys. Laužtės $EFMO$ grandys $EF=1$ cm, $FM=4$ cm, $MO=2$ cm. Ar gali atkarpa EO būti lygi: a) 0,5 cm; b) 8 cm?

Sprendimas. Remkimės 2.7 teorema. Laužtės $EFMO$ (205 pav.) ilgis turi būti ne mažesnis už jos galus jungiančios atkarpos ilgį. Laužtės $EFMO$ ilgis lygus 7 cm, todėl atkarpa EO turi būti ne didesnė kaip 7 cm.

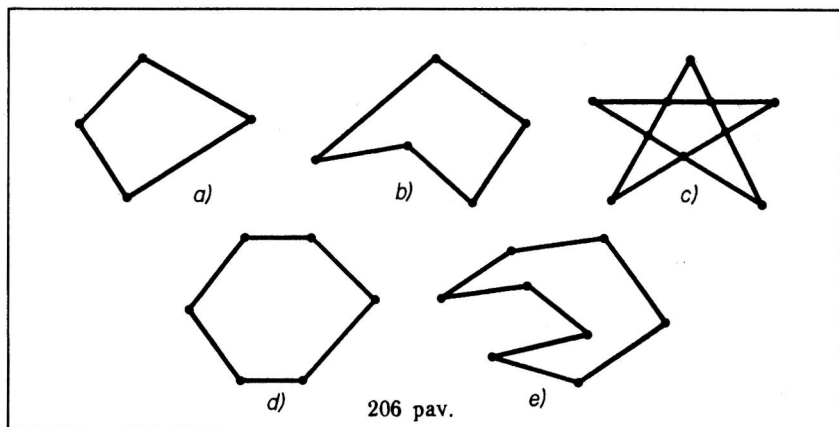
Taigi atkarpa EO gali būti lygi 0,5 cm, bet negali būti lygi 8 cm.

29. Iškilieji daugiakampiai. *Daugiakampiu* vadiname paprastąją uždarają laužtę, kurios gretimos grandys nėra vienoje tiesėje.

206 paveiksle pavaizduoti įvairūs daugiakampiai. *Daugiakampio viršūnėmis* vadiname laužtės viršūnes, o *daugiakampio kraštinėmis* — laužtės grandis. *Istrižainėmis* vadiname atkarpas, jungiančias negretimas viršūnes. Daugiakampį, turintį n viršūnių, taigi ir n kraštinių, vadiname n -kampiu.

Plokščiuoju daugiakampiu, arba *daugiakampe sritimi*, vadiname baigtinę plokštumos dalį, kurią riboja daugiakampis. 207 paveiksle pavaizduoti plokštieji daugiakampiai, arba daugiakampės sritys.

Iškilioju daugiakampiu vadiname daugiakampį, esantį vienoje pusplokštumėje nuo kiekvienos tiesės, kurioje yra jo kraštinė. Čia laikome, kad ta tiesė yra pusplokštumėje. 207a paveiksle pavaizduotas iškilasis daugiakampis, o 207b paveiksle — neiškilasis. Iškiliojo *daugiakampio kampu* prie viršūnės vadiname kampą, kurį nusako iš tos viršūnės išeinančios daugiakampio kraštinės.



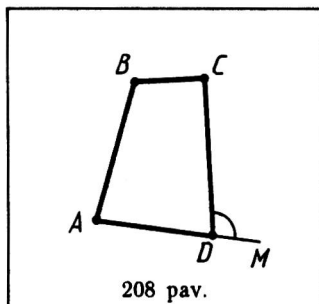
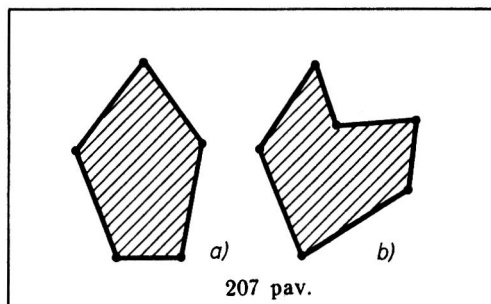
2.8 t. | Iškiliojo n -kampio kampų suma lygi $180^\circ(n-2)$.

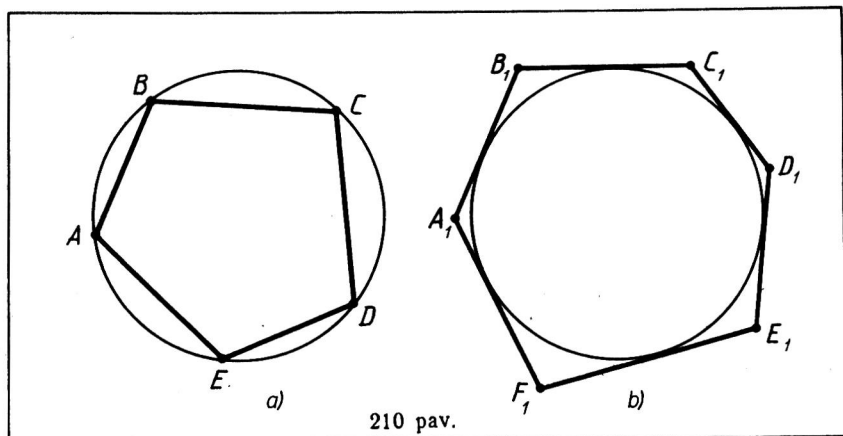
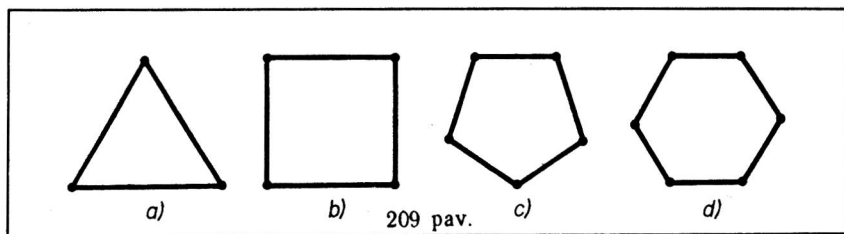
Iškiliojo *daugiakampio priekampiu* prie viršūnės vadiname kampą, gretutinį su daugiakampio kampu prie tos viršūnės. 208 paveiksle $\angle CDA$ — iškiliojo daugiakampio $ABCD$ kampas, o $\angle CDM$ — priekampis.

P a v y z d y s. Iškiliojo penkiakampio kampai proporcingi skaičiams 1, 3, 5, 7, 11. Raskite juos.

S p r e n d i m a s. Iškiliojo penkiakampio kampų suma lygi $180^\circ \cdot 3 = 540^\circ$ (2.8 teorema). Pažymėję mažiausią kampą x , sudarome lygtį $x + 3x + 5x + 7x + 11x = 540$, iš čia $x = 20$. Todėl penkiakampio kampai lygūs $20^\circ, 60^\circ, 100^\circ, 140^\circ, 220^\circ$.

30. Taisyklingieji daugiakampiai. *Taisyklinguoju daugiakampiu* vadiname iškiląjį daugiakampį, kurio visos kraštinės lygios ir visi kampai lygūs. 209 paveiksle pavaizduoti taisyklingieji daugiakampiai: trikampis, keturkampis (kvadratas), penkiakampis ir šešiakampis.





Įbrėžtu į apskritimą daugiakampiu (įbrėžtiniu daugiakampiu) vadiname daugiakampį, kurio visos viršūnės yra viename apskritime. Apibrėžtu apie apskritimą daugiakampiu (apibrėžtiniu daugiakampiu) vadiname daugiakampį, kurio visos kraštinės liečia vieną apskritimą.

210 paveiksle daugiakampis $ABCDE$ įbrėžtas į apskritimą, o daugiakampis $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ apibrėžtas apie apskritimą.

2.9 t. | Taisyklingasis iškilasis daugiakampis yra įbrėžtinis ir apibrėžtinis daugiakampis.

Kai taisyklingojo n -kampio kraštinė lygi a , tai apibrėžtinio apskritimo spindulį R randame pagal formulę

$$R = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}.$$

Įbrėžtinio apskritimo spindulį r randame pagal formulę

$$r = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$$



Taisyklingojo lygiakraščio trikampio atveju ($n=3$)

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad r = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

Taisyklingojo keturkampio (kvadrato) atveju ($n=4$)

$$R = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad r = \frac{a}{2}.$$

Taisyklingojo šešiakampio atveju ($n=6$)

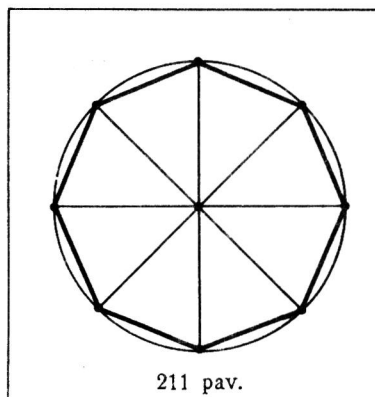
$$R = a, \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Pavyzdys. Į apskritimą įbrėžkite taisyklingąjį aštuonkampį.

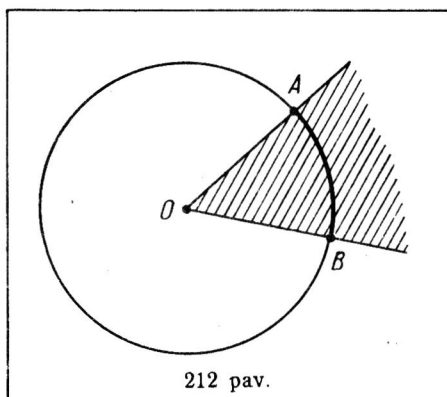
Sprendimas. Du statmeni skersmenys apskritimą dalija į keturias lygias dalis. Kiekvieną iš tų dalių padalykime pusiau, t. y. nubrėžkime stačiųjų kampų pusiaukampines. Gautus 8 apskritimo taškus paeiliui sujunkime atkarpomis. Gausime į apskritimą įbrėžtą aštuonkampį (211 pav.). Visi gauti aštuoni trikampiai lygūs pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų. Todėl aštuonkampio kraštinės ir kampai lygūs, taigi jis taisyklingas.

31. Apskritimo ilgis. Iš vaizdumo sumetimų aišku, kad apskritimo ilgis kiek norima mažai skiriasi nuo įbrėžto į jį iškilojo daugiakampio perimetro, kai daugiakampio kraštinės pakankamai mažos. Apskritimo ilgis turi tokią savybę.

2.10 t. | Apskritimo ilgio ir jo skersmens santykis nepriklauso nuo apskritimo, t. y. tas santykis yra vienodas, kad ir kokie būtų du apskritimai.



211 pav.



212 pav.



Apskritimo ilgio ir skersmens santykį įprasta žymėti graikiška raide π (skaitoma „pi“): $\frac{C}{2R} = \pi$. π – iracionalusis skaičius, $\pi \approx 3,1416$.

Taigi *apskritimo ilgis* apskaičiuojamas pagal formulę

$$C = 2\pi R.$$

212 paveiksle pavaizduotas apskritimo, kurio centras yra O , lankas AB .

Centrinį n° kampą atitinkančio lanko ilgis apskaičiuojamas pagal formulę

$$l = \frac{\pi R}{180} \cdot n.$$

Kampo *radianiniu matu* vadiname jį atitinkančio lanko ilgio ir apskritimo spindulio santykį. Iš apskritimo lanko ilgio formulės išplaukia, kad $\frac{l}{R} = \frac{\pi}{180} \cdot n$, t. y. kad kampo radianinis matas lygus jo laipsniniam matui, padaugintam iš $\frac{\pi}{180}$. Skyrium imant, 180° kampo radianinis matas yra π , stačiojo kampo radianinis matas lygus $\frac{\pi}{2}$.

Kampų radianinio mato vienetas yra *radianas*. Vieno radiano kampas — kampas, kurio lanko ilgis lygus spinduliui. Vieno radiano kampo laipsninis matas lygus $\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$.

1 p a v y z d y s. Taškai M ir N dalija apskritimą į du lankus, kurių laipsninių matų skirtumas lygus 90° . Kam lygus kiekvieno lanko laipsninis matas?

S p r e n d i m a s. Lankų laipsninių matų suma lygi 360° , o skirtumas lygus 90° . Tų kampų laipsninius matus pažymėkime x ir y . Tada

$$\begin{cases} x + y = 360, \\ x - y = 90. \end{cases}$$

Išsprendę sistemą, randame $x = 225^\circ$, $y = 135^\circ$.

2 p a v y z d y s. Kvadrato kraštinė 4 cm. Apskaičiuokite: 1) į jį įbrėžto apskritimo ilgį; 2) apie jį apibrėžto apskritimo ilgį.

S p r e n d i m a s. 1) Įbrėžto į kvadratą apskritimo spindulys lygus 2 cm. Pagal formulę $C = 2\pi R$ randame $C = 4\pi$ cm.

2) Apie kvadratą apibrėžto apskritimo spindulys lygus $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Todėl $R = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$, o apskritimo ilgis lygus $C = 4\sqrt{2}\pi$ cm.



III SKYRIUS. TRIKAMPIŲ SPRENDIMAS

§ 6. Stačiojo trikampio kraštinių ir kampų sąsajos

32. Kosinusas, sinusas ir tangentas. Stačiojo trikampio *smailiojo kampo kosinusu* vadiname statinio, esančio prie to kampo, ir įžambinės santykį. Kampo α kosinusą žymime šitaip: $\cos \alpha$. 213 paveiksle

$$\cos \alpha = \frac{AC}{BC}.$$

3.1 t. | Kampo kosinusas priklauso tik nuo kampo laipsninio mato.

Kampo α sinusas (žymime $\sin \alpha$) vadiname statinio AB , esančio prieš kampą α , ir įžambinės BC santykį (žr. 213 pav.):

$$\sin \alpha = \frac{AB}{BC}.$$

Kampo α tangentu (žymime $\operatorname{tg} \alpha$) vadiname statinio AB , esančio prieš kampą α , ir statinio AC , esančio prie kampo α , santykį (žr. 213 pav.):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{AC}.$$

Kampo sinusas ir tangentas, kaip ir kosinusas, priklauso tik nuo kampo didumo.

Yra sudarytos specialios $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ ir $\operatorname{tg} \alpha$ lentelės. Žinant kampą α , jose galima rasti $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ arba, žinant $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, arba $\operatorname{tg} \alpha$ reikšmę, rasti atitinkamą kampą α (žr. V. B r a d i s. Keturženklės matematinės lentelės.— K.: Sviesa.— 1986). Ten pat paaiškinta, kaip naudotis tomis lentelėmis.

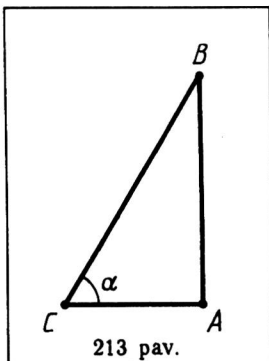
Kampo sinusą, kosinusą ir tangentą sieja tokios tapatybės:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad (1)$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad (2)$$

$$1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \quad (3)$$

Šios tapatybės taikomos, kai žinomas vienas iš dydžių $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ arba $\operatorname{tg} \alpha$, o reikia rasti kitus du. Pavyzdžiui, kai $\sin \alpha = a$, tai iš (1) tapatybės $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - a^2$, ir $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - a^2}$.





3.2 t. | Jei α — bet kuris smailusis kampas, tai $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$, $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$.

30° , 45° ir 60° kampų sinuso, kosinuso ir tangento reikšmės pateiktos p. 142 ir 244.

3.3 t. | Kai smailusis kampas α didėja, $\sin \alpha$ ir $\operatorname{tg} \alpha$ didėja, o $\cos \alpha$ mažėja.

Galima apibrėžti ne tik smailiojo kampo, bet ir bet kurio kampo (taigi ir bet kurio kampo nuo 0° iki 180°) sinuso, kosinuso ir tangento reikšmės (žr. I dalį).

3.4 t. | Jei α — bet kuris kampas, $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, tai $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$. Jei, be to, $\alpha \neq 90^\circ$, tai $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$.

1 p a v y z d y s. Parašykite didėjimo tvarka skaičius $\sin 20^\circ$, $\sin 45^\circ$, $\sin 90^\circ$, $\sin 30^\circ$, $\sin 70^\circ$.

S p r e n d i m a s. Remiantis 3.3 teorema, $\sin \alpha$ didėja, kai $\alpha(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$ didėja. Todėl $\sin 20^\circ < \sin 30^\circ < \sin 45^\circ < \sin 60^\circ < \sin 70^\circ < \sin 90^\circ$.

2 p a v y z d y s. Suprastinkite reiškinių $2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 1$.

S p r e n d i m a s. P i r m a s b ū d a s. $2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 1 = 2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$.

A n t r a s b ū d a s. $2 \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha - 1 = \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 1 = \sin^2 \alpha + 1 - 1 = \sin^2 \alpha$.

33. Stačiojo trikampio kraštinių ir kampų sąsajos. Iš $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ ir $\operatorname{tg} \alpha$ apibrėžimų gauname tokias taisykles:

| Statinis, esantis prieš kampą α , lygus įžambinei, padaugintai iš $\sin \alpha$.

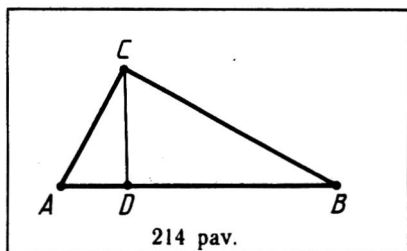
| Statinis, esantis prie kampo α , lygus įžambinei, padaugintai iš $\cos \alpha$.

| Statinis, esantis prieš kampą α , lygus antrajam statiniui, padaugintam iš $\operatorname{tg} \alpha$.

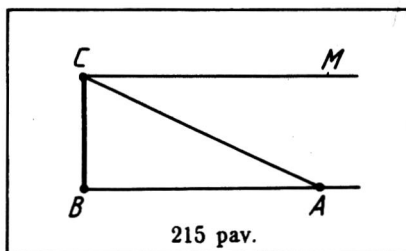
Taikydami šias taisykles, kai žinome stačiojo trikampio vieną kraštinę ir smailųjį kampą, galime rasti kitas dvi kraštines arba, kai žinome dvi kraštines, rasti smailiuosius kampus (iš lentelių).

| Stačiojo trikampio statinis yra įžambinės ir to statinio projekcijos įžambinėje *geometrinis vidurkis*.

| Stačiojo trikampio aukštinė, nubrėžta iš stačiojo kampo viršūnės, yra statinių projekcijų įžambinėje *geometrinis vidurkis*.



214 pav.



215 pav.

Teigiamųjų skaičių a ir b geometrinis (proporcinis) vidurkis vadiname skaičių $x = \sqrt{ab}$. Toks pavadinimas kilęs iš to, kad skaičiai a , x ir b sudaro geometrinę progresiją, t. y. skaičius x lygus proporcijos $a:x=x:b$ viduriniams nariams.

Stačiojo trikampio ABC (214 pav.) kampas C yra statusis, AD ir BD — statinių AC ir BC projekcijos į žambinę. Minėtas savybes galima išreikšti lygybėmis

$$AC = \sqrt{AB \cdot AD},$$

$$BC = \sqrt{AB \cdot BD},$$

$$CD = \sqrt{AD \cdot BD}.$$

Pavyzdys. Iš 18 m aukščio stebėtojas mato nežinomą objektą žemėjimo kampu $6^\circ 18'$. Raskite atstumą nuo stebėjimo punkto pagrindo iki to objekto.

Sprendimas. Iš sąlygos žinome, kad $BC = 18$ m, $\angle MCA = 6^\circ 18'$ (215 pav.). Todėl $\angle ACB = 83^\circ 42'$. Iš trikampio ABC randame:

$$AB = BC \operatorname{tg} 83^\circ 42' = 18 \cdot 9,0579;$$

$$AB \approx 163 \text{ m}.$$

§ 7. Trikampių sprendimas

34. Kosinusų teorema. Sinusų teorema

3.5 t. | Trikampio kraštinės kvadratas lygus kitų dviejų kraštinių kvadratų sumai minus dviguba sandauga tų kraštinių ir tarp jų esančio kampo kosinuso (*kosinusų teorema*).

Iš $\triangle ABC$ (216 pav.) pagal kosinusų teorema

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \alpha.$$



Kosinusų teoremos išvados.

1. Trikampio kraštinės kvadratas lygus kitų dviejų kraštinių kvadratų sumai „ $\pm$ “ dviguba sandauga vienos jų ir kitos kraštinės projekcijos joje. Ženklą „ $+$ “ reikia rašyti tada, kai prieš esantis kampas yra bukas, o ženklą „ $-$ “ rašyti, kai tas kampas smailus.

216 paveiksle pavaizduotu atveju

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AD.$$

2. Lygiagretainio įstrižainių kvadratų suma lygi jo kraštinių kvadratų sumai.

217 paveiksle pavaizduotas lygiagretainis $ABCD$, taigi teisinga lygybė

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.$$

3.6 t. | Trikampio kraštinės proporcingos prieš jas esančių kampų sinusams (*sinusų teorema*).

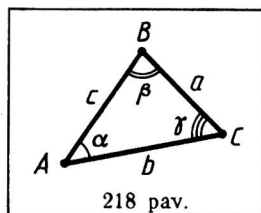
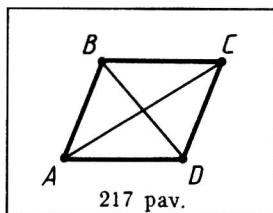
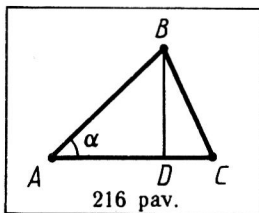
218 paveiksle pavaizduotas trikampis ABC . Taigi sinusų teoremą užrašome taip:

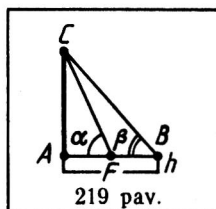
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Iš sinusų teoremos išplaukia, kad trikampyje prieš didesnį kampą yra didesnė kraštinė, prieš didesnę kraštinę yra didesnis kampas.

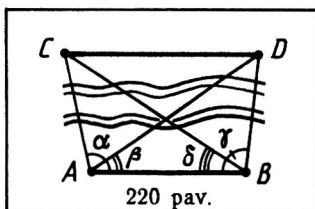
Jei trikampio ABC (218 pav.) kraštinė a mažesnė už kraštinę b ($a < b$), tai $\alpha < \beta$; jei $\beta > \gamma$, tai $b > c$.

1 p a v y z d y s. Kai reikia išmatuoti daikto aukštį, o daikto pagrindas A neprieinamas (219 pav.), tai pasirenkamas taškas B ir tiesėje AB nužymima bazė $FB = m$. Iš taškų F ir B išmatuojami kampai α ir β , kuriais matomas aukščiausias daikto taškas C . Įrodykite, kad $H = \frac{m \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)} + h$; čia h — instrumento kampams matuoti aukštis ($\angle A = 90^\circ$).

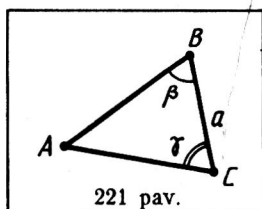




219 pav.



220 pav.



221 pav.

S p r e n d i m a s. $H = AC + h$. Iš trikampio CFB pagal sinusų teoremą (3.6 teorema)

$$\frac{CF}{\sin \beta} = \frac{m}{\sin(\alpha - \beta)}, \text{ iš čia } CF = \frac{m \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Iš trikampio AFC $AC = CF \sin \alpha = \frac{m \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$. Taigi

$$H = \frac{m \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)} + h.$$

2 p a v y z d y s. Viename upės krante pažymėti taškai A ir B . Atstumas $AB = a = 3784$ m. Apskaičiuokite atstumą tarp taškų C ir D , esančių kitapus upės, kai duoti $\angle BAC = \alpha$, $\angle BAD = \beta$, $\angle ABC = \delta$, $\angle ABD = \gamma$ (220 pav.).

S p r e n d i m a s. Iš trikampio ACD pagal kosinusų teoremą (3.6 teorema)

$$CD^2 = AD^2 + AC^2 - 2AD \cdot AC \cos \angle DAC, \angle DAC = \alpha - \beta.$$

Iš trikampio ABD pagal sinusų teoremą (3.5 teorema)

$$\frac{AD}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin(\beta + \gamma)}, \text{ todėl } AD = \frac{a \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}.$$

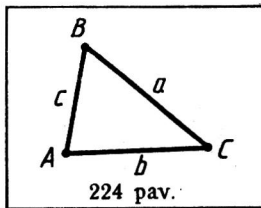
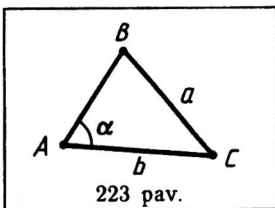
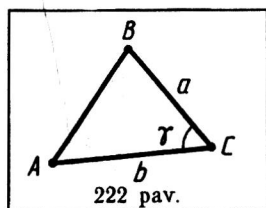
Iš trikampio ABC $\frac{AC}{\sin \delta} = \frac{a}{\sin(\alpha + \delta)}$, todėl $AC = \frac{a \sin \delta}{\sin(\alpha + \delta)}$.

$$CD = a \sqrt{\frac{\sin^2 \gamma}{\sin^2(\beta + \gamma)} + \frac{\sin^2 \delta}{\sin^2(\alpha + \delta)} - 2 \frac{\sin \gamma \sin \delta \cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \delta) \sin(\beta + \gamma)}}.$$

35. Trikampių sprendimas. *Trikampių sprendimas* yra trikampio nežinomų kraštinių ir kampų radimas, kai žinomi kai kurie kampai ir kraštinės. Trikampio kraštinės žymėsime a , b , c , prieš jas esančius kampus — α , β , γ .

Išnagrinėsime pagrindinius trikampių sprendimo uždavinius.

1 u ž d a v i n y s. Duota trikampio kraštinė a ir du kampai, pavyzdžiui, β ir γ . Raskite trečią kampą ir kitas dvi kraštines.



221 paveiksle trikampio ABC kraštinė $CB=a$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$. Reikia rasti b , c , $\angle A$.

Sprendimas. $\angle A$ randame pagal 1.21 teoremą, b ir c — pagal 3.6 teoremą.

Uždavinys turi sprendinį, kai $\beta+\gamma<180^\circ$.

Sprendinio vienatis išplaukia 1.16 teoremos.

2 uždavinys. Duotos trikampio dvi kraštinės, pavyzdžiui, a ir b , ir kampas tarp jų γ . Raskite kitus du kampus ir trečią kraštinę.

222 paveiksle trikampio ABC kraštinė $BC=a$, $AC=b$ ir $\angle C=\gamma$. Reikia rasti c , α ir β .

Sprendimas. Kraštinę c randame pagal 3.5 teoremą, α ir β — pagal 3.5 arba 3.6 teoremą.

Uždavinys visada turi sprendinį.

Sprendinio vienatis išplaukia iš 1.15 teoremos.

3 uždavinys. Duotos trikampio dvi kraštinės, pavyzdžiui, a ir b , ir kampas, esantis prieš vieną iš jų, pavyzdžiui, kampas α . Raskite kitus du kampus ir trečią kraštinę.

223 paveiksle trikampio ABC kraštinė $BC=a$, $AC=b$, $\angle A=\alpha$. Reikia rasti c , β , γ .

Sprendimas. Kampą β randame pagal 3.6 teoremą, γ — pagal 1.19 teoremą, c — pagal 3.6 teoremą.

Uždavinys gali neturėti sprendinio, gali turėti vieną arba du sprendinius.

4 uždavinys. Duotos visos trikampio kraštinės. Raskite trikampio kampus.

224 paveiksle trikampio ABC kraštinės $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$. Reikia rasti α , β , γ .

Sprendimas. Iš pradžių randame vieną iš kampų α , β arba γ pagal 3.5 teoremą. Po to sprendžiame taip, kaip 2 uždavinį.

Uždavinys turi sprendinį, jei didžiausia kraštinė yra mažesnė už kitų dviejų kraštinių sumą.

Sprendinio vienatis išplaukia iš 1.17 teoremos.

IV SKYRIUS. DEKARTINĖS KOORDINATĖS

§ 8. Plokštumos koordinatės

36. Plokštumos koordinačių apibrėžimas. Plokštumoje per tašką O nubrėžkime dvi viena kitai statmenas tieses x ir y — *koordinačių ašis*. Tiesę x (dažniausiai ji horizontali) vadiname *abscisių ašimi* (arba x ašimi), tiesę y — *ordinačių ašimi* (arba y ašimi). Tų ašių susikirtimo tašką O vadiname *koordinačių pradžia*. Taškas O kiekvieną ašį dalija į dvi pusašes. Vieną pusašę susitarsime vadinti *teigiamąja* (prie jos pridėsime rodyklę), o kitą — *neigiamąja*. 225 paveiksle pavaizduotos x ir y ašys, taškas O — koordinačių pradžia.

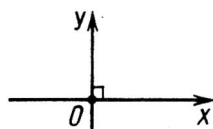
Kiekvienam plokštumos taškui A priskirkime du skaičius — *taško koordinates* — abscisę (x) ir ordinatę (y) pagal tokią taisyklę.

Per tašką A nubrėžkime tiesę, lygiagrečią ordinačių ašiai (226 pav.). Ji kirs abscisių ašį kuriame nors taške A_x . Taško A *abscisė* vadiname skaičių x , kurio modulis lygus atstumui nuo taško O iki A_x . Tas skaičius teigiamas, kai A_x priklauso teigiamajai pusašei; jis neigiamas, kai A_x priklauso neigiamajai pusašei. Jei taškas A yra ordinačių ašyje, tai skaičių x laikysime lygiu nuliui.

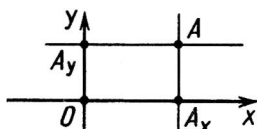
Taško O ordinatę apibrėžiame analogiškai. Per tašką A brėžiame tiesę, lygiagrečią abscisių ašiai. (žr. 226 pav.). Ji kerta ordinačių ašį taške A_y . Taško A *ordinatė* vadiname skaičių y , kurio modulis lygus atstumui nuo taško O iki A_y . Tas skaičius teigiamas, kai A_y priklauso teigiamajai pusašei; jis neigiamas, kai A_y priklauso neigiamajai pusašei. Jei taškas A yra abscisių ašyje, tai skaičių y laikome lygiu nuliui.

Taško koordinates rašome skliaustuose po raidės, žyminčios tašką, pavyzdžiui, $A(x; y)$ (pirma rašome abscisę, paskui — ordinatę).

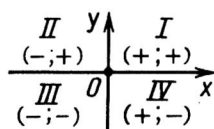
Koordinačių ašys dalija plokštumą į keturias dalis — I, II, III ir IV *ketvirčius* (227 pav.). Kiekviename ketvirtyje abi koordinatės nekeičia ženklo. Pirmajame ketvirtyje jos teigiamos, antrajame — abscisė neigiamas, o ordinatė teigiama, trečiajame — absci-



225 pav.



226 pav.



227 pav.



sė ir ordinatė neigiamos, ketvirtajame — abscisė teigiama, o ordinatė neigiama (žr. 227 pav.).

Abscisių ašies (x ašies) taškų ordinatės lygios nuliui ($y=0$), o ordinačių ašies (y ašies) taškų abscisės lygios nuliui ($x=0$). Koordinačių pradžios abscisė ir ordinatė lygios nuliui.

Plokštumą, kurios taškams nurodytu būdu priskirtos koordinatės x ir y , vadiname *plokštuma* xy . Tos plokštumos tašką, kurio koordinatės yra x ir y , kartais žymėsime tiesiog $(x; y)$.

Apibrėžtąsias taškų koordinates vadiname *dekartinėmis*, nes jas pirmasis vartojo prancūzų matematikas R. Dekartas (1596—1650).



R. Dekartas

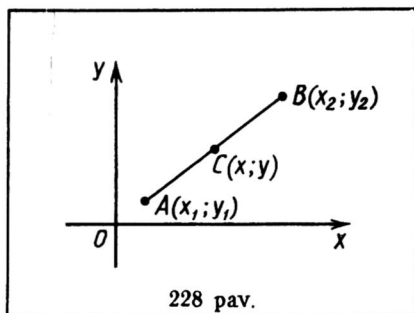
37. Atkarpos vidurio koordinatės. Atstumas tarp taškų. Sakyme, $A(x_1; y_1)$ ir $B(x_2; y_2)$ — bet kurie du taškai, o $C(x; y)$ — atkarpos AB vidurys (228 pav.). Formulės, kurios sieja taško C koordinates su taškų A ir B koordinatėmis, yra tokios:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

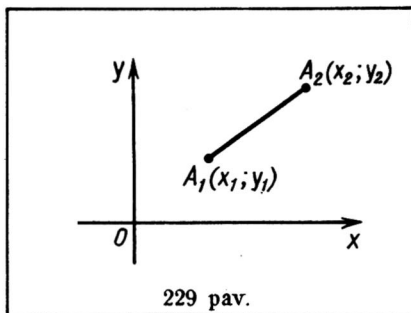
$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Gali atsitikti, kad atkarpa AB lygiagreti x ašiai arba y ašiai, bet ir tada formulės teisingos.

Pateiksime formulę, pagal kurią galima rasti atstumą tarp dviejų taškų, kai žinomos jų koordinatės.



228 pav.



229 pav.



Sakykime, plokštumoje xy (229 pav.) turime du taškus: A_1 , kurio koordinatės yra x_1 ir y_1 , ir A_2 , kurio koordinatės yra x_2 ir y_2 . Tada atstumas tarp taškų A_1 ir A_2 lygus

$$A_1 A_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Taškai A_1 ir A_2 gali būti išsidėstę ir kitaip. Pavyzdžiui, atkarpa $A_1 A_2$ gali būti lygiagreči x arba y ašiai, bet formulė teisinga visais atvejais.

1 p a v y z d y s. Raskime skersmens galo koordinatės, jei kitas jo galas yra taškas $(2; 3)$, o apskritimo centras — taškas $(0; 1)$.

S p r e n d i m a s. Apskritimo centras yra skersmens vidurys, todėl taikysime formules, siejančias atkarpos vidurio taško koordinatės $(x; y)$ su jos galų koordinatėmis $(x_1; y_1)$ ir $(x_2; y_2)$:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Taigi $0 = \frac{2 + x_2}{2}$, $1 = \frac{3 + y_2}{2}$, iš čia $x_2 = -2$, $y_2 = -1$ — skersmens kito galo koordinatės.

2 p a v y z d y s. Raskime atstumą tarp taškų $A(-1; 2)$ ir $B(2; 4)$.

S p r e n d i m a s. Remiantis atstumo tarp dviejų taškų formule, $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$; čia x_1, y_1 — taško A koordinatės, x_2, y_2 — taško B koordinatės. Įrašę taškų A ir B koordinatės, randame $AB = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$.

§ 12. Figūrų lygtys

38. Apskritimo lygtis. Plokščiosios *figūros* dekartinių koordinačių *lygtimi* vadiname lygtį su dviem kintamaisiais x ir y , kurią tenkina kiekvieno figūros taško koordinatės, ir atvirkščiai, du bet kurie skaičiai, tenkinantys tą lygtį, yra figūros taško koordinatės.

Nagrinėkime apskritimą, kurio centras yra $A_0(a; b)$, o spindulys R (230 pav.). Apskritimo kiekvieno taško koordinatės tenkina lygtį

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \quad (1)$$

Atvirkščiai, kiekvienas taškas A , kurio koordinatės tenkina (1) lygtį, priklauso tam apskritimui.

Taigi apskritimo, kurio centras yra $A_0(a; b)$, o spindulys R , lygtis yra

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$



Jei apskritimo centras sutampa su koordinatinių pradžia, tai jo lygtis yra tokia:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

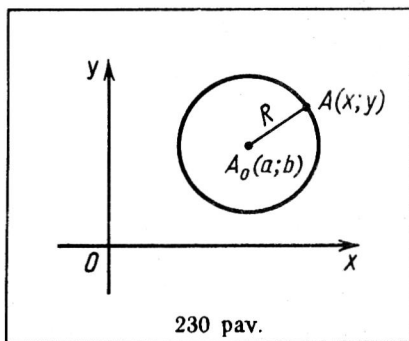
Nustatykite, kada susikerta apskritimai, kurių spinduliai lygūs a ir b , o atstumas tarp centrų lygus c .

231 paveiksle pavaizduoti du apskritimai, kurių centrai yra O ir O_1 , o spinduliai a ir b . Tašką O laikykime dekartinės koordinatinių sistemos pradžia, o pusėsę OO_1 — teigiamąją abscisių pusę. Parašykime apskritimų lygtis:

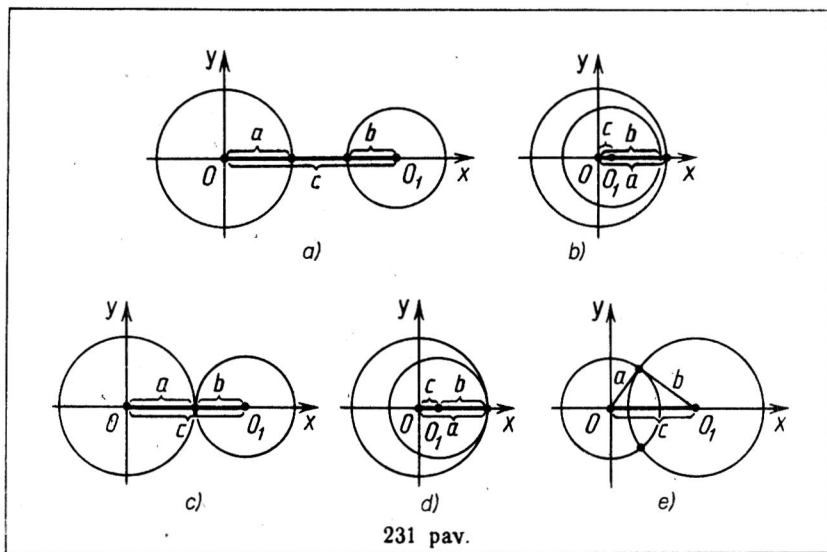
$$x^2 + y^2 = a^2, \quad (x - c)^2 + y^2 = b^2.$$

Išsprendus šią lygčių sistemą, galima padaryti tokią išvadą.

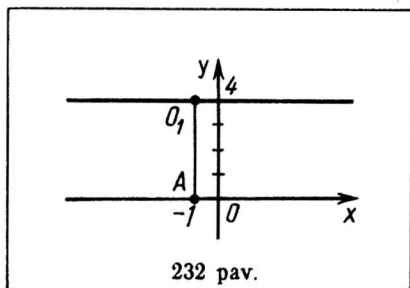
Jei vienas iš skaičių a, b, c yra didesnis už kitų dviejų skaičių sumą, tai apskritimai nesusikerta (231a, b pav.). Jei vienas iš tų skaičių lygus kitų dviejų skaičių sumai, tai apskritimai liečiasi (231c, d pav.). Jei kiekvienas iš tų skaičių yra mažesnis už kitų dviejų skaičių sumą, tai apskritimai susikerta dviejuose taškuose (231e pav.).



230 pav.



231 pav.



P a v y z d y s. Apskritimas liečia x ašį taške $(-1; 0)$, jo centras yra tiesėje $y=4$. Parašykite apskritimo lygtį.

S p r e n d i m a s. Koordinatinių sistemoje pavaizduokime tiesę $y=4$ ir tašką $A(-1; 0)$ (232 pav.). Pagal sąlygą apskritimas turi liesti x ašį taške A , o jo centras turi būti tiesėje $y=4$. Apskritimo centro — taš-

ko O — koordinatės bus $(-1; 4)$ (remiantis apskritimo liestinės apibrėžimu).

Rašome apskritimo, kurio centras yra taškas $(-1; 4)$, o spindulys lygus 4, lygtį:

$$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 16.$$

39. Tiesės lygtis. Kiekvienos tiesės dekartinių koordinatinių lygtis yra tokia

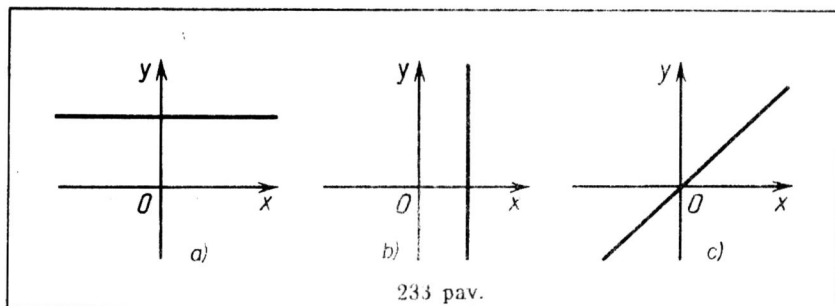
$$ax + by + c = 0.$$

Koeficientai a ir b gali įgyti įvairias reikšmes. Nuo jų priklauso tiesės padėtis koordinatinių ašių atžvilgiu. Išnagrinėsime šiuos atskirus atvejus.

1. $a=0, b \neq 0$. Šiuo atveju tiesės lygtį galime parašyti taip:
 $y = -\frac{c}{b}$.

Visų tiesės taškų ordinatės lygios $(-\frac{c}{b})$, todėl tiesė lygiagreči x ašiai (233 a pav.). Atskiru atveju, kai $c=0$, tiesė sutampa su x ašimi.

2. $b=0, a \neq 0$. Šiuo atveju lygtį galima parašyti taip: $x = -\frac{c}{a}$. Tiesė lygiagreči y ašiai (233b pav.) arba sutampa su ja, kai ir $c=0$.





3. $c=0$. Tiesė eina per koordinačių pradžią (233c pav.).

Jei tiesės bendrosios lygties $ax+by+c=0$ koeficientas b nelygus nuliui, tai $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Pažymėkime $-\frac{a}{b}=k$, $-\frac{c}{b}=q$, tada $y=kx+q$. Šios lygties koeficientą k vadiname *tiesės krypties koeficientu*.

234 paveiksle taškai $A(x_1; y_1)$ ir $B(x_2; y_2)$ priklauso pavaizduotai tiesei, todėl

$$y_1 = kx_1 + q, \quad y_2 = kx_2 + q;$$

iš antros lygybės panariui atėmę pirmąją, gauname

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1),$$

iš čia $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

234a paveiksle pavaizduotu atveju

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg} \alpha.$$

234b paveiksle pavaizduotu atveju

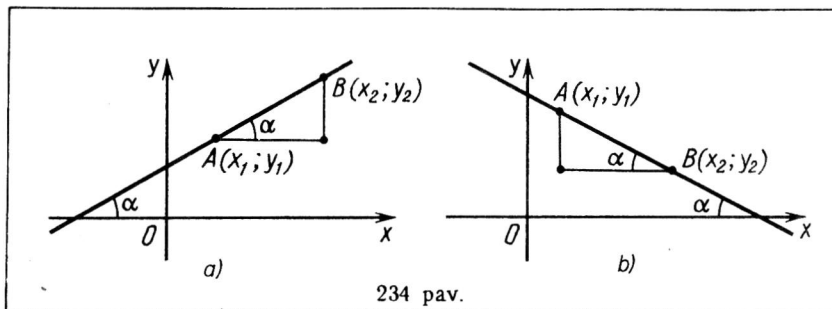
$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Tiesės krypties koeficiento geometrinė prasmė tokia: tiesės lygties koeficiento k modulis lygus smailiojo kampo, kurį tiesė sudaro su x ašimi, tangentui.

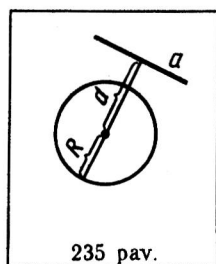
P a v y z d y s. Parašykite tiesės, einančios per koordinačių pradžią ir tašką $(4; -2)$, lygtį.

S p r e n d i m a s. Imkime tiesės lygtį $y=kx+q$. Reikia nustatyti k ir q .

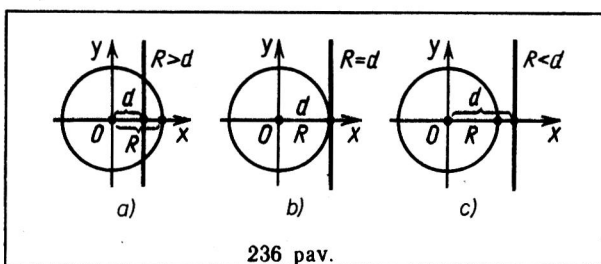
Tiesė eina per koordinačių pradžią, todėl taško $(0; 0)$ koordinatės tenkina tiesės lygtį: $0=k \cdot 0 + q$, t. y. $q=0$.



234 pav.



235 pav.



236 pav.

Krypties koeficientą apskaičiuojame pagal formulę

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

čia $(x_1; y_1)$ ir $(x_2; y_2)$ — taškai, per kuriuos eina tiesė, t. y. $x_1 = 0, y_1 = 0, x_2 = 4, y_2 = -2$. Todėl $k = \frac{-2-0}{4-0} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$.

Mūsų tiesės lygtis yra $y = -\frac{x}{2}$.

40. Tiesės ir apskritimo susikirtimas. 235 paveiksle pavaizduotas spindulio R apskritimas ir tiesė a , d — atstumas nuo apskritimo centro iki tiesės a . Apskritimo centrą laikykime koordinatinių pradžia, o tiesę, statmeną tiesei a , — x ašimi (236 pav.). Tuomet apskritimo lygtis bus $x^2 + y^2 = R^2$, o tiesės lygtis $x = d$. Išsprendę gautą sistemą, randame:

$$x = d, \quad y = \pm \sqrt{R^2 - d^2}.$$

Tiesė kerta apskritimą dviejuose taškuose, kai $R > d$ (236a pav.); tiesė liečia apskritimą, kai $R = d$ (236b pav.); tiesė nekečia apskritimo, kai $R < d$ (236c pav.).

1 p a v y z d y s. Apskritimas, kurio centras yra taškas $(2; 3)$, liečia y ašį. Ar jis kerta x ašį?

S p r e n d i m a s. **P i r m a s b ū d a s.** Apskritimo centras — taškas $(2; 3)$, jis liečia y ašį, todėl jo spindulys lygus 2. Apskritimo lygtis tokia: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$.

Apskritimas kerta x ašį, kai tenkinama sąlyga $R > d$; čia R — apskritimo spindulys, o d — apskritimo centro atstumas iki x ašies; mūsų atveju $R = 2, d = 3$. Todėl apskritimas nekečia x ašies.

A n t r a s b ū d a s. Kai $y = 0$, tai $(x - 2)^2 + (0 - 3)^2 = 4$, $(x - 2)^2 = -5$, o tai neįmanoma. Todėl apskritimas $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$ nekečia x ašies.

2 p a v y z d y s. Su kuria parametro c reikšme tiesė $x + y + c = 0$ liečia apskritimą $x^2 + y^2 = 1$?



S p r e n d i m a s. Spręskime lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x+y+c=0, \\ x^2+y^2=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x=-c-y, \\ (-c-y)^2+y^2=1. \end{cases}$$

Iš antros lygties turime $2y^2+2cy+c^2-1=0$. Spręskime ją y atžvilgiu. Lygties diskriminantas yra $D=-4c^2+8$. Tiesė liečia apskritimą, kai jie turi vienintelį bendrą tašką. Taip bus, kai kvadratinė lygtis y atžvilgiu turės vienintelį sprendinį. Vadinas, $D=0$, $-4c^2+8=0$, todėl $c=\pm\sqrt{2}$. Tiesės $x+y+\sqrt{2}=0$ ir $x+y-\sqrt{2}=0$ liečia apskritimą $x^2+y^2=1$.

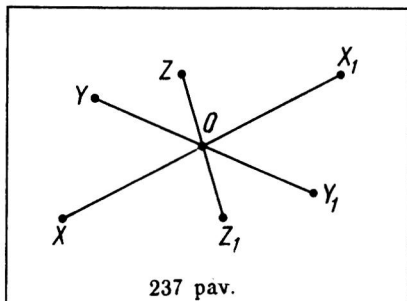
V S K Y R I U S. FIGŪRŲ TRANSFORMACIJOS

§ 10. Judesiai

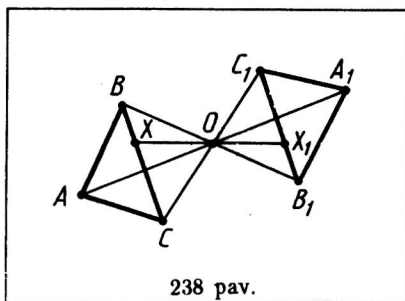
41. Figūrų transformacijų pavyzdžiai. Jei kiekvieną duotas figūros tašką koku nors būdu perkelsime, tai gausime naują figūrą. Sakoma, kad naują figūrą gavome, transformuodami duotąją. Pateiksime keletą *figūrų transformacijų* pavyzdžių.

1. *Simetrija taško atžvilgiu (centrinė simetrija).* Sakykime, O — fiksuotas taškas, o X — bet kuris plokštumos taškas. Tašką X_1 vadiname *simetrišku* taškui X taško O atžvilgiu, jei taškai X , O , X_1 yra vienoje tiesėje ir $OX=OX_1$. Taškas, simetriškas taškui O , yra pats taškas O . 237 paveiksle taškai X ir X_1 , Y ir Y_1 , Z ir Z_1 simetriški vienas kitam taško O atžvilgiu.

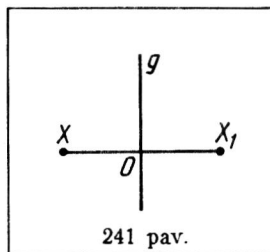
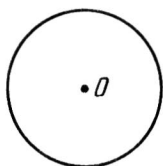
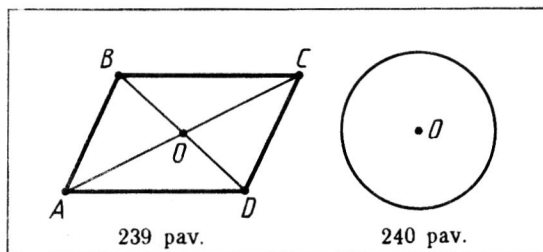
Sakykime, F — duota figūra ir O — fiksuotas plokštumos taškas. Figūros F transformaciją į figūrą F_1 , kuri kiekvieną figūros F tašką X perveda į tašką X_1 , simetrišką taško O atžvilgiu, vadiname *simetrija* (arba *simetrijos transformacija*) *taško O atžvilgiu*. Trikampis $A_1B_1C_1$ simetriškas trikampiui ABC centro O atžvilgiu (238 pav.).



237 pav.



238 pav.



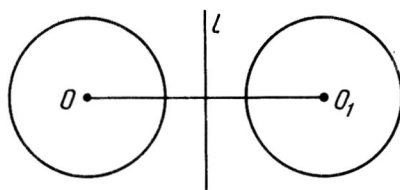
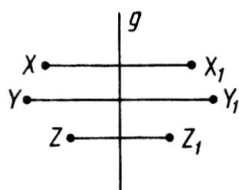
Jei simetrijos transformacija taško O atžvilgiu figūrą F perveda į ją pačią, tai figūrą F vadiname *simetriška centro atžvilgiu*, o tašką O — *simetrijos centru*. Pavyzdžiui, lygiagretainis yra figūra, simetriška centro atžvilgiu. Jo simetrijos centras yra įstrižainių susikirtimo taškas (239 pav.). Apskritimas, kurio centras O , taip pat yra simetriškas centro O atžvilgiu (240 pav.).

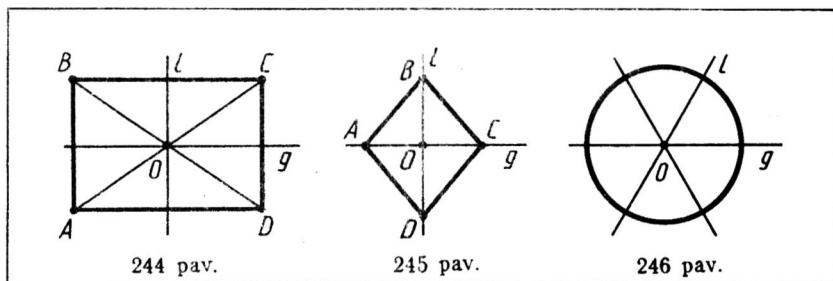
2. *Simetrija tiesės atžvilgiu (ašinė simetrija)*. Sakykime, g — fiksuota tiesė (241 pav.). Tašką X_1 vadiname *simetrišku* taškui X tiesės g atžvilgiu, jei tiesė XX_1 statmena tiesei g ir $OX_1 = OX$; čia O — tiesių XX_1 ir g susikirtimo taškas. Jei taškas X priklauso tiesei g , tai jam simetriškas yra pats taškas X . Taškas, simetriškas taškui X_1 , yra taškas X . 242 paveiksle taškai X ir X_1 , Y ir Y_1 , Z ir Z_1 simetriški tiesės g atžvilgiu.

Figūros F transformaciją į figūrą F_1 , kuri kiekvieną figūros F tašką X perveda į tašką X_1 , simetrišką tiesės g atžvilgiu, vadiname *simetrijos transformacija* (arba *simetrija*) *tiesės g atžvilgiu*. Figūras F ir F_1 vadiname *simetriškomis tiesės g atžvilgiu*. 243 paveiksle pavaizduoti apskritimai, simetriški tiesės l atžvilgiu.

Jei simetrija tiesės g atžvilgiu figūrą F perveda į ją pačią, tai tą figūrą vadiname *simetriška tiesės g atžvilgiu*, o tiesę g — *figūros simetrijos ašimi*.

Pavyzdžiui, tiesės, einančios per stačiakampio įstrižainių susikirtimo tašką ir lygiagrečios jo kraštinėms, yra stačiakampio simetrijos ašys (244 pav.). Tiesės, kuriose yra rombo įstrižainės, —





rombo simetrijos ašys (245 pav.). Apskritimas simetriškas kiekvienos per jo centrą einančios tiesės atžvilgiu (246 pav.).

3. *Homotetija*. Sakysime, F — duota figūra, O — fiksuotas taškas (247 pav.). Per bet kurį figūros F tašką X nubrėžiame spindulį OX ir jame atidedame atkarpą OX_1 , lygią $k \cdot OX$ (k — teigiamas skaičius).

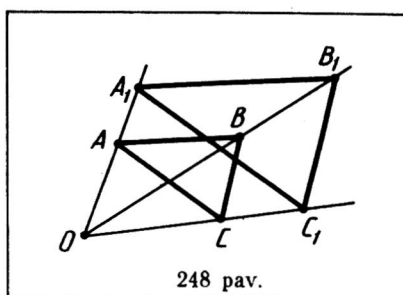
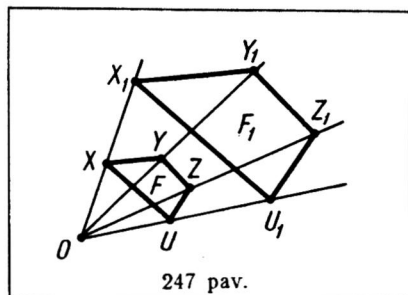
Figūros F transformaciją, kuria kiekvienas jos taškas X nurodytu būdu pervedamas į tašką X_1 , vadiname *homotetija centro O atžvilgiu*. Skaičių k vadiname *homotetijos koeficientu*. Figūras F ir F_1 vadiname *homotetiškomis*. Keturkampis $X_1Y_1Z_1U_1$ homotetiškas keturkampiiui $XYZU$ centro O atžvilgiu; homotetijos koeficientas $k=2$ (žr. 247 pav.).

Trikampis $A_1B_1C_1$ homotetiškas trikampiui ABC centro O atžvilgiu; homotetijos koeficientas lygus 1,6 (248 pav.).

42. Judesio sąvoka. Judesio savybės. *Judesiu* vadiname figūros F transformaciją į figūrą F_1 , kuri nekeičia atstumo tarp taškų, t. y. bet kuriuos figūros F taškus X ir Y pveda į tokius figūros F_1 taškus X_1 ir Y_1 , kad $XY=X_1Y_1$. 41 skyrelyje išnagrinėtos simetrija taško atžvilgiu ir simetrija tiesės atžvilgiu yra judesiai.

5.1 t. | Simetrijos transformacija taško atžvilgiu yra judesys.

5.2 t. | Simetrijos transformacija tiesės atžvilgiu yra judesys.





Nurodysime keletą judesių savybių.

5.3 t. | Judesys tiesės taškus perveda į tiesės taškus, nekeisdamas jų tarpusavio padėties.

Tai reiškia, kad tiesės taškai A, B, C pereina į taškus A_1, B_1, C_1 , priklausančius vienai tiesei. Be to, jei taškas B yra tarp taškų A ir C , tai taškas B_1 yra tarp taškų A_1 ir C_1 .

Iš 5.3 teoremos aišku, kad judesys tieses perveda į tieses, pustieses — į pustieses, atkarpas — į atkarpas.

Judesys nekeičia kampų tarp pustiesių.

Du vienas po kito atliekami judesiai sudaro judesį.

249 paveiksle pavaizduoti du vienas po kito atliekami judesiai: simetrija ašies p atžvilgiu figūrą F perveda į figūrą F_1 , o simetrija taško O atžvilgiu figūrą F_1 perveda į figūrą F_2 . Matome, kad vieną po kito atlikus tuos judesius, nepakito atstumai tarp atitinkamų taškų. Taigi transformacija, pervedanti figūrą F į F_2 , yra judesys.

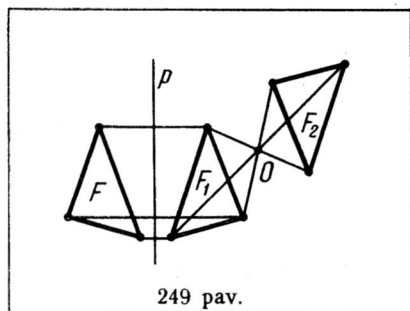
Sakykime, figūros F transformacija į figūrą F_1 skirtingus figūros F taškus perveda į skirtingus figūros F_1 taškus. Tarkime, kad bet kuris figūros F taškas X , atliekant šią transformaciją, pereina į figūros F_1 tašką X_1 . Figūros F_1 transformaciją į figūrą F , kuri tašką X_1 perveda į tašką X , vadiname *atvirkštine pradinei transformacijai*.

Judesiui atvirkštinė transformacija irgi yra judesys.

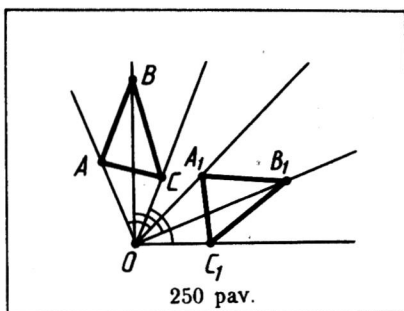
Išnagrinėkime dar vieną judesį — posūkį.

Posūkiu apie tašką vadiname judesį, kuriuo kiekvienas spindulys, išeinantis iš taško, pasukamas tuo pačiu kampu ir ta pačia kryptimi (pagal laikrodžio rodyklę arba prieš laikrodžio rodyklę). Trikampis ABC pasuktas apie tašką O 60° kampu pagal laikrodžio rodyklę (250 pav.). Kampai tarp spindulių OA ir OA_1 , OB ir OB_1 , OC ir OC_1 lygūs 60° .

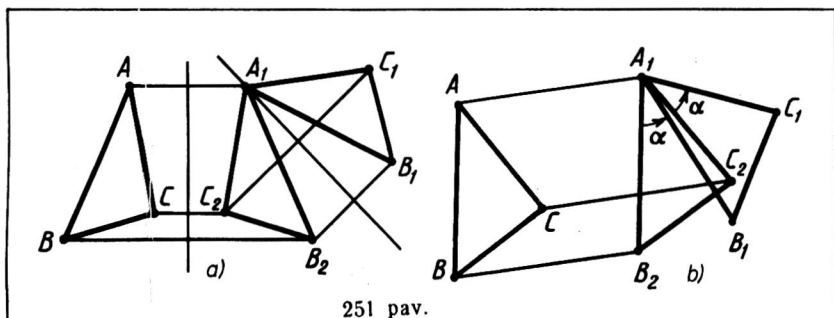
Lygiomis figūromis vadiname figūras, kurios judesiu pervedamos viena į kitą. Figūrų lygumui žymėti vartojame įprastinį



249 pav.



250 pav.



ženklā „lygu“. Uzrašas $F=F_1$ reiškia, kad figūra F lygi figūrai F_1 .

Rašant $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ laikoma, kad judesiu sutapdinamos viršūnės yra atitinkamos vietose. Taip susitarus, ši trikampių lygumo sąvoka sutampa su iki šiol vartota sąvoka.

1 p a v y z d y s. Duoti du trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ (251 pav.), kurių $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$. Įrodykite, kad juos galima sutapdinti tokiu judesiu, kad viršūnė A pereitų į viršūnę A_1 , B — į B_1 , C — į C_1 .

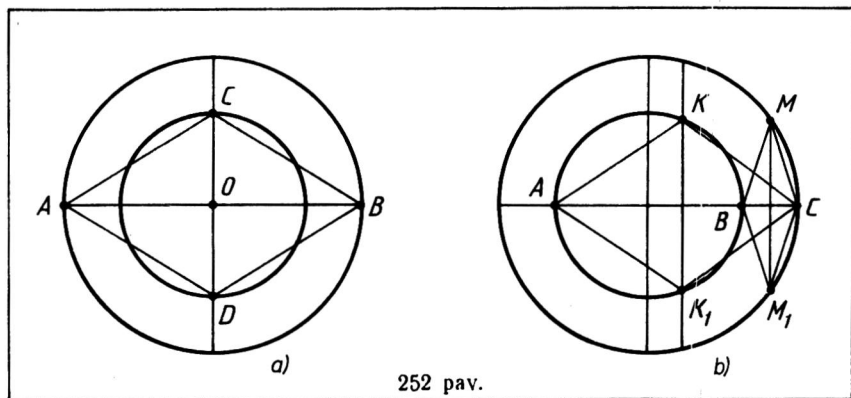
S p r e n d i m a s. Uzdevinio sprendimas priekšnosauja no tri-
kampiu tarpusavio padeties. Bet ir paveiksle pavaizduotu atveju
galima sprēsti keliais būdais.

1. Vienas iš galimų sprendimo būdų pavaizduotas 251a paveiksle. Trikampis $A_1B_2C_2$ gautas iš trikampio ABC atlikus simetriją atkarpos AA_1 vidurio statmens atžvilgiu. Trikampis $A_1B_1C_1$ gautas iš trikampio $A_1B_2C_2$ atlikus simetriją atžvilgiu tiesės, jungiančios tašką A_1 su atkarpos B_2B_1 viduriu. Žinome, kad du vienas po kito atliekami judesiai sudaro judesį. Taigi trikampį $A_1B_1C_1$ gavome judesiu iš trikampio ABC .

2. 251b paveiksle pavaizduotas kitas sprendimo būdas. Trikampis $A_1B_2C_2$ gautas iš trikampio ABC lygiagrečiuoju postūmiu (žr. 45 skyrelį) atstumu AA_1 spindulio AA_1 nusakoma kryptimi. Trikampis $A_1B_1C_1$ gautas iš trikampio $A_1B_2C_2$ posūkiu kampu α prieš laikrodžio rodyklę. Įrodymą baigiame taip pat, kaip ir pirmą atvejų.

* 2 p a v y z d y s. Duoti du koncentriniai apskritimai. Nubraižykite tokį rombą, kad: 1) dvi jo viršūnės priklausytų vienam apskritimui, o kitos dvi — kitam; 2) trys jo viršūnės priklausytų vienam apskritimui, o ketvirta — kitam.

S p r e n d i m a s. 1) Brėžkime bet kurį vieno apskritimo skersmenį AB ir jam statmeną kito apskritimo skersmenį CD (252a pav.). Įrodysime, kad keturkampis $CBDA$ — rombas. Įstrižainių susikirtimo taškas dalija jas pusiau, todėl tas keturkampis yra



lygiagretainis (2.1 teorema). Be to, jo kraštinės lygios: $CD=DB$, $CA=DA$, nes AB — simetrijos ašis; $AC=BC$, $BD=AD$, nes CD — simetrijos ašis.

2) Mažesniojo apskritimo skersmenį AB pratęskime, kol jis kirs didesnįjį apskritimą taške C . Nubrėžkime atkarpų AC ir BC simetrijos ašis KK_1 ir MM_1 (252b pav.). Gauname rombus $BMCM_1$ ir $AKCK_1$. Savarankiškai įrodykite, kad abu rombai tenkina uždavinio sąlygą.

§ 11. Panašiosios figūros

43. Panašumo transformacija. *Panašumo transformacija* vadiname figūros transformaciją į kitą figūrą, kuri atstumus tarp taškų keičia (didina arba mažina) vienodą skaičių kartų. Tai reiškia, jog bet kurie figūros F taškai X ir Y , atlikus panašumo transformaciją, pereina į tokius figūros F_1 taškus X_1 ir Y_1 , kad $X_1Y_1=kXY$.

Skaičių k vadiname *panašumo koeficientu*. Kai $k=1$, panašumo transformacija yra judesys.

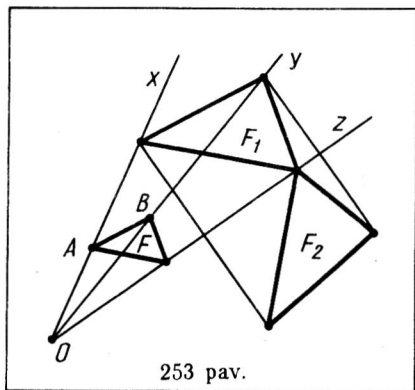
5.4 t. | Homotetija yra panašumo transformacija.

Išvardysime panašumo transformacijos savybes.

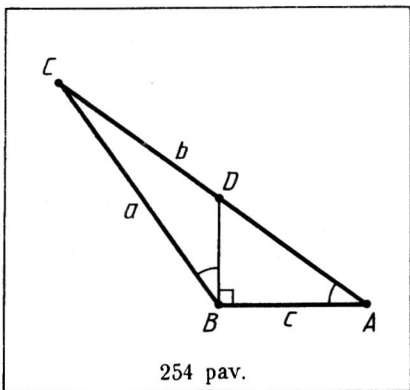
1. Panašumo transformacija tris taškus A, B, C , priklausančius vienai tiesei, perveda į tris taškus A_1, B_1, C_1 , irgi priklausančius vienai tiesei. Be to, jei taškas B yra tarp taškų A ir C , tai taškas B_1 yra tarp taškų A_1 ir C_1 .

2. Panašumo transformacija tieses perveda į tieses, pustieses — į pustieses, atkarpas — į atkarpas.

3. Panašumo transformacija nekeičia kampų tarp pustiesių.



253 pav.



254 pav.

4. Ne kiekviena panašumo transformacija yra homotetija. 253 paveiksle figūra F_1 gauta iš figūros F , atlikus homotetiją, o figūra F_2 gauta iš figūros F_1 , atlikus simetriją OZ ašies atžvilgiu. Figūros F transformacija į figūrą F_2 yra panašumo transformacija, nes ji nekeičia atstumų tarp atitinkamų taškų santykių, bet tai nėra homotetija.

44. Panašiosios figūros. *Panašiomis figūromis* vadiname figūras, kurias panašumo transformacija perveda vieną į kitą. Figūrų panašumui žymėti vartojamas specialus ženklas „ $\sim$ “. Užrašą $F_1 \sim F$ skaitome taip: „Figūra F_1 panaši į figūrą F “.

Iš panašumo transformacijos savybių išplaukia, kad panašiųjų figūrų atitinkami kampai yra lygūs, o atitinkamos kraštinės proporcingos.

Rašant $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ laikoma, kad panašumo transformacija sutapdinamos viršūnės yra atitinkamose vietose, t. y. A pereina į A_1 , B — į B_1 , C — į C_1 .

Kai trikampis ABC panašus į trikampį $A_1B_1C_1$, tai

$$\angle A = \angle A_1, \quad \angle B = \angle B_1, \quad \angle C = \angle C_1,$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

Du trikampiai panašūs, kai jų atitinkami kampai lygūs, o atitinkamos kraštinės proporcingos.

Suformuluosime trikampių panašumo požymius.

5.5 t.

Du trikampiai yra panašūs:

- 1) jei vieno trikampio du kampai atitinkamai lygūs kito trikampio dviem kampams;



- 2) jei vieno trikampio dvi kraštinės proporcingos kito trikampio dviem kraštinėms, o kampai tarp tų kraštinių lygūs;
 3) jei vieno trikampio kraštinės proporcingos kito trikampio kraštinėms.

P a v y z d y s. Duotas trikampis ABC , kurio $\angle B = 90^\circ + \angle A$. Kaip susijusios to trikampio kraštinės a , b ir c ?

S p r e n d i m a s. Nubrėžkime $BD \perp AB$ (254 pav.). Tada $\angle A = \angle DBC$, $\angle CDB$ — trikampio ABD priekampis, t. y. $\angle CDB = 90^\circ + \angle A$, todėl $\angle CDB = \angle CBA$. $\triangle ABC \sim \triangle BDC$ pagal du kampus (5.5 teorema). Iš trikampių panašumo turime $\frac{a}{CD} = \frac{c}{BD} = \frac{b}{a}$, todėl

$$CD = \frac{a^2}{b}, \quad BD = \frac{a \cdot c}{b}, \quad AD = AC - CD = \frac{b^2 - a^2}{b}.$$

Iš $\triangle ABD$ $AD^2 = BD^2 + AB^2$, todėl

$$(b^2 - a^2)^2 = c^2 (a^2 + b^2).$$

VI SKYRIUS. VEKTORIAI

§ 12. Vektoriaus sąvoka

45. Lygiagretusis postūmis. Plokštumoje sudarykime dekartinę koordinačių x ir y sistemą. Figūros F transformaciją, kuri kiekvieną figūros tašką $(x; y)$ perveda į tašką $(x+a; y+b)$, a ir b — konstantos, vadiname *lygiagrečiuoju postūmiu*.

255 paveiksle figūra F_1 gauta iš figūros F lygiagrečiuoju postūmiu. Tašką A , kurio koordinatės yra $(x; y)$, šita transformacija perveda į tašką $B(x+a; y+b)$. Lygiagretusis postūmis nusakomas formulėmis $x_1 = x+a$, $y_1 = y+b$. Iš jų randame taško, į kurį pereina lygiagretiniai pastumtas taškas $(x; y)$, koordinatės x_1 ir y_1 .

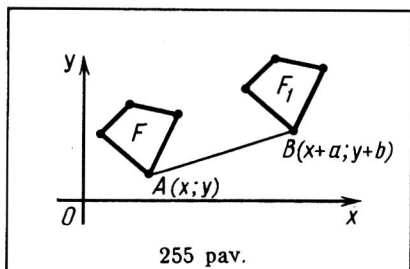
6.1 t. | Lygiagretusis postūmis yra judesys.

Išvardysime kai kurias lygiagrečiojo postūmio savybes.

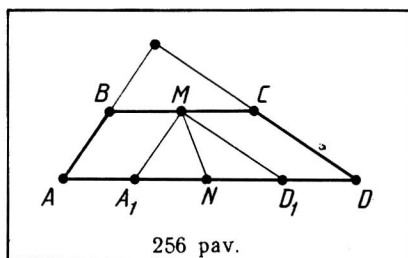
1. Atlikus lygiagretųjį postūmį, taškai pasislenka lygiagrečiomis (arba sutampančiomis) tiesėmis vienodu atstumu.

2. Lygiagrečiuoju postūmiu tiesė pervedama į jai lygiagrečią tiesę (arba į ją pačią).

6.2 t. | Kad ir kokie būtų taškai A ir A_1 , yra vienintelis lygiagretusis postūmis, kuris tašką A perveda į tašką A_1 .



255 pav.



256 pav.

6.3 t. Transformacija, atvirkštinė lygiagrečiajam postūmiui, yra lygiagretusis postūmis. Du lygiagretieji postūmiai, atlikti vienas po kito, sudaro lygiagretųjį postūmį.

1 p a v y z d y s. Trapecijos šoninės kraštinės yra tarpusavy statmenose tiesėse. Įrodykite, kad atkarpa, kurios galai yra trapecijos pagrindų vidurio taškai, lygi pagrindų skirtumo pusei.

S p r e n d i m a s. Sakykime, trapecijos $ABCD$ pagrindai yra AD ir BC , M — atkarpos BC vidury, N — atkarpos AD vidury. Atlikime lygiagretųjį postūmį atstumu BM pustiesės BM kryptimi. Tada taškas B pereis į tašką M , o taškas A pereis į tašką A_1 .

Dabar atlikime lygiagretųjį postūmį atstumu CM pustiesės CM kryptimi. Tada taškas C pereis į tašką M , taškas D — į tašką D_1 (256 pav.). Turime

$$A_1N = AN - AA_1 = AN - BM; \quad (1)$$

$$ND_1 = ND - DD_1 = ND - MC. \quad (2)$$

Sudedame (1) ir (2) lygbes:

$$A_1N + ND_1 = AN + ND - (BM + MC) = AD - BC.$$

Bet $A_1N + ND_1 = A_1D_1$, todėl

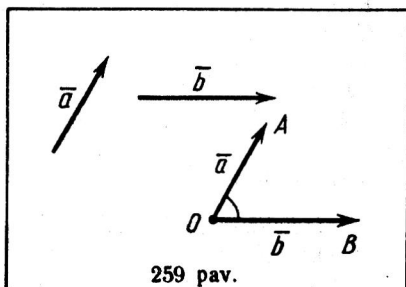
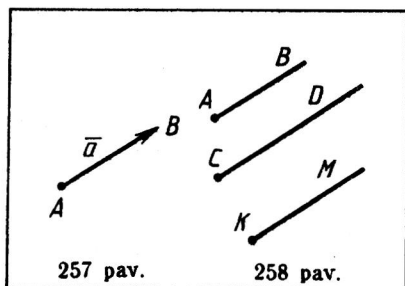
$$A_1D_1 = AD - BC. \quad (3)$$

Kadangi $A_1N = ND_1$, tai MN — stačiojo trikampio A_1MD_1 pusiauakraštinė. Todėl $MN = \frac{1}{2} (A_1N + ND_1)$. Remiantis (3) lygybe,

$$MN = \frac{1}{2} A_1D_1 = \frac{1}{2} (AD - BC).$$

46. Vektoriaus sąvoka. Kai kurie fizikiniai dydžiai (jėga, greitis, pagreitis ir kiti) apibūdinami ne tik skaičiumi, bet ir kryptimi. Todėl tokio tipo fizikinius dydžius patogiau vaizduoti *kryptinėmis atkarpomis*.

Kryptinę atkarpą vadiname *vektoriumi*. Vektoriams žymėti vartojamos mažosios raidės $a, b, c, \dots$. Vektorių galima žymėti nu-



rodant jį vaizduojančios atkarpos galus. Pavyzdžiui, 257 paveiksle pavaizduotą vektorių galima žymėti $\overline{AB}$. Tašką A vadiname vektoriaus $\overline{AB}$ *pradžia*, tašką B — *pabaiga*. Nurodant vektorių vaizduojančios atkarpos galus pirma rašoma raidė, reiškianti vektoriaus pradžią. Vietoj žodžio „vektorius“ virš jį žyminčių raidžių kartais brėžiama rodyklė arba brūkšnys. Pavyzdžiui, užrašą „ $\vec{a}$ “ skaitome taip: „vektorius a “.

Vienakryptėmis *pustiesėmis* vadiname dvi pustieses, kurias galima sutaptinti lygiagrečiuoju postūmiu, kitaip sakant, yra toks lygiagretusis postūmis, kad viena pustiesė pereina į kitą.

Jei pustiesė a vienakryptė su b , o pustiesė b vienakryptė su c , tai pustiesės a ir c taip pat vienakryptės.

Pustiesės $\overline{AB}$ ir $\overline{CD}$ (258 pav.) vienakryptės. $\overline{CD}$ ir $\overline{KM}$ taip pat vienakryptės, todėl pustiesės $\overline{AB}$ ir $\overline{KM}$ vienakryptės.

Dvi pustieses vadiname *priešpriešėmis*, kurių kiekviena yra vienakryptė su pustiese, papildančia kitą pustiesę.

Vektorius $\overline{AB}$ ir $\overline{CD}$ vadiname *vienakrypčiais*, kai pustiesės $\overline{AB}$ ir $\overline{CD}$ yra vienakryptės.

Vektoriaus ilgiu (arba *moduliu*) vadiname tą vektorių vaizduojančios atkarpos ilgį. Vektoriaus $\vec{a}$ ilgį žymime $|\vec{a}|$.

Lygiais vektoriais vadiname du vektorius, kuriuos galima sutaptinti lygiagrečiuoju postūmiu. Tai reiškia, kad yra toks lygiagretusis postūmis, kuris vieno vektoriaus pradžią sutaptina su kito vektoriaus pradžia, o pabaigą — su pabaiga.

Lygūs vektoriai yra vienakrypčiai ir turi vienodą ilgį. Atvirkščiai, jei vienakrypčiai vektoriai yra vienodo ilgio, tai jie lygūs.

Vektoriaus pradžia gali sutapti su jo pabaiga. Tokį vektorių vadiname *nulinio vektoriumi*. Nulinį vektorių žymime nuliu su virš jo nubrėžtu brūkšniu: $\vec{0}$. Nulinis vektorius neturi krypties. Jo ilgį laikome lygiu nuliui. Visus nulinius vektorius susitarsime laikyti lygiais.

Remiantis lygiagrečiojo postūmio savybėmis (6.1 teorema), iš kiekvieno taško galima nubrėžti vienintelį vektorių, lygų duotam vektoriui.



Kampu tarp nenulinių vektorių $\overline{AB}$ ir $\overline{AC}$ vadiname kampą BAC . Kampu tarp bet kurių vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ vadiname kampą tarp jiems lygių vektorių, turinčių bendrą pradžią. Kampas tarp vienkrypčių vektorių laikomas lygiu nuliui.

259 paveiksle pavaizduoti vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$. Nuo taško O atidėkime vektorius $\overline{OA} = \vec{a}$ ir $\overline{OB} = \vec{b}$. Tada $\angle AOB$ yra kampas tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$.

47. Vektoriaus koordinatės. Sakykime, vektoriaus $\vec{a}$ pradžia yra taškas $A_1(x_1; y_1)$, o pabaiga — taškas $A_2(x_2; y_2)$ (260 pav.). Vektoriaus $\vec{a}$ koordinatėmis vadiname skaičius $a_1 = x_2 - x_1$ ir $a_2 = y_2 - y_1$. Vektoriaus koordinatės rašome po raidės, žyminčios vektorių, šiuo atveju $\vec{a}(a_1; a_2)$, arba tiesiog $(a_1; a_2)$.

Iš formulės, išreiškiančios atstumą tarp dviejų taškų koordinatėmis (žr. 37 skyrelį), išplaukia, kad vektoriaus $(a_1; a_2)$ ilgis lygus $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

260 paveiksle vektoriaus $\overline{AB}$ koordinatės yra a_1 ir a_2 , $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$,

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

6.3 t. | Lygūs vektoriai turi lygias atitinkamas koordinates. Atvirkščiai, jei vektorių atitinkamos koordinatės lygios, tai vektoriai lygūs.

§ 13. Vektorių veiksmai

48. Vektorių suma. Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, kurių koordinatės yra a_1, a_2 ir b_1, b_2 , suma vadiname vektoriumi $\vec{c}$, kurio koordinatės lygios $a_1 + b_1, a_2 + b_2$, t. y.

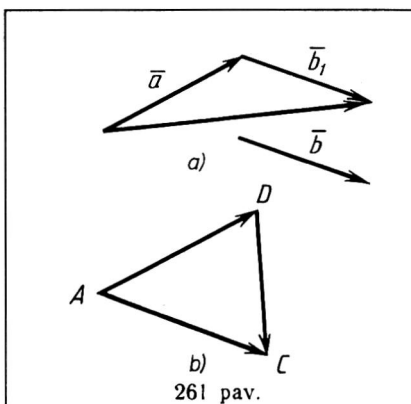
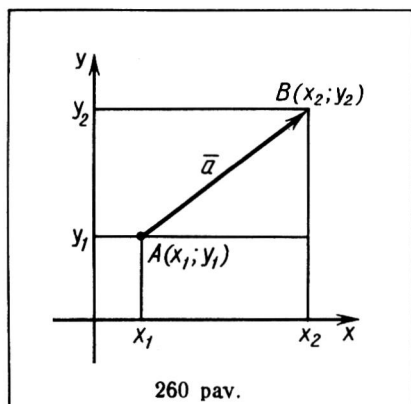
$$\vec{a}(a_1; a_2) + \vec{b}(b_1; b_2) = \vec{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2).$$

Kad ir kokie būtų vektoriai $\vec{a}(a_1; a_2)$, $\vec{b}(b_1; b_2)$, $\vec{c}(c_1; c_2)$, teisingos lygybės

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}, \quad \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}.$$

6.4 t. | Kad ir kokie būtų taškai A, D ir C , teisinga vektorinė lygybė $\overline{AD} + \overline{DC} = \overline{AC}$.

Remdamiesi šia teorema, galime nubraižyti bet kokių vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ sumą. Reikia nuo vektoriaus $\vec{a}$ pabaigos atidėti vektoriumi $\vec{b}_1$, lygų vektoriui $\vec{b}$. Tuomet vektorius, kurio pradžia sutampa su vektoriaus $\vec{a}$ pradžia, o pabaiga — su vektoriaus $\vec{b}_1$ pabaiga, bus vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ suma (261a pav.). Tokį dviejų vektorių sudėties būdą vadiname *trikampio taisykle*.



Jei A , B , C ir D — lygiagretainio $ABCD$ viršūnės, tai teisinga vektorinė lygybė $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. Tai dar viena vektorių sudėties taisyklė — *lygiagretainio taisyklė*.

262 paveiksle pavaizduotų vektorių $\overrightarrow{OA}$ ir $\overrightarrow{OB}$ suma yra vektorius $\overrightarrow{OC}$; čia $OACB$ lygiagretainis.

Vektorių $\vec{a}$ ($a_1; a_2$) ir $\vec{b}$ ($b_1; b_2$) skirtumu vadiname tokį vektorių $\vec{c}$ ($c_1; c_2$), kurį sudėję su vektoriumi $\vec{b}$, gauname vektorių $\vec{a}$. Iš to nustatome vektoriaus $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ koordinates:

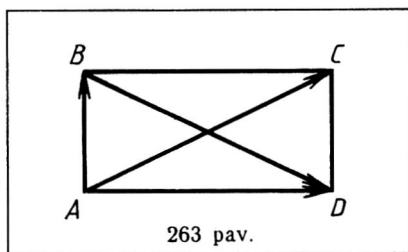
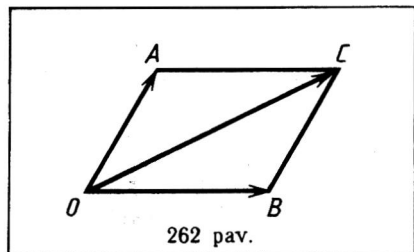
$$c_1 = a_1 - b_1, \quad c_2 = a_2 - b_2.$$

Jei duoti du vektoriai $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{AD}$ (pradžia bendra), tai jų skirtumas yra vektorius $\overrightarrow{DC}$, t. y.

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC} \quad (261b \text{ pav.}).$$

Šią taisyklę patogiu taikyti ieškant vektorių skirtumo.

P a v y z d y s. Duotas stačiakampis $ABCD$. Išreikškite vektorius $\overrightarrow{BD}$ ir $\overrightarrow{AC}$ vektoriais $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AD}$.





S p r e n d i m a s. Pagal lygiagretainio taisyklę $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}$ (263 pav.). Pagal vektorių skirtumo radimo taisyklę $\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB}$.

49. Vektoriaus daugyba iš skaičiaus. Kolinearieji vektoriai. Vektoriaus $(\vec{a}_1; \vec{a}_2)$ ir skaičiaus λ sandauga vadiname vektorių $(\lambda \vec{a}_1; \lambda \vec{a}_2)$, t. y.

$$(\vec{a}_1; \vec{a}_2) \lambda = (\lambda \vec{a}_1; \lambda \vec{a}_2).$$

Remdamiesi vektoriaus daugybos iš skaičiaus apibrėžimu, įsitikiname, kad esant bet kokiame vektoriui $\vec{a}$ ir bet kokiems skaičiams λ ir μ , teisinga lygybė

$$(\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}.$$

Esant bet kokiems vektoriams $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ ir bet kokiame skaičiui λ , teisinga lygybė

$$\lambda (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}.$$

6.5 t. Vektoriaus $\lambda \vec{a}$ ilgis lygus $|\lambda| |\vec{a}|$. Jei $\vec{a} \neq \vec{0}$ ir $\lambda > 0$, tai vektoriaus $\lambda \vec{a}$ kryptis sutampa su vektoriaus $\vec{a}$ kryptimi; jei $\vec{a} \neq \vec{0}$ ir $\lambda < 0$, tai vektoriaus $\lambda \vec{a}$ kryptis priešinga vektoriaus $\vec{a}$ kryptiai.

Kolineariais vektoriais vadiname du nenulinius vektorius, kurie yra vienoje tiesėje arba lygiagrečiose tiesėse. 264 paveiksle vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ kolinearūs.

6.6 t. Kolinearių vektorių atitinkamos koordinatės yra proporcingos. Atvirkščiai, jei dviejų vektorių atitinkamos koordinatės proporcingos, tai tie vektoriai kolinearūs.

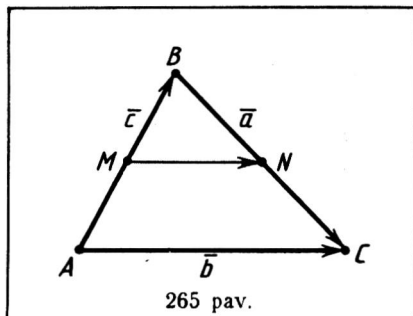
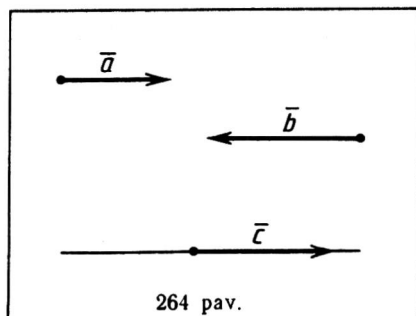
Vienetiniu vektoriumi vadiname vektorių, kurio ilgis lygus vienetui. Vienetinį vektorių, kurio kryptis sutampa su teigiamosios koordinatinių pusašės kryptimi, vadiname *koordinatiniu vektoriumi*, arba *ortu*.

Abscisių ašies ortą žymėsime $\vec{e}_1(1; 0)$, ordinačių ašies ortą $\vec{e}_2(0; 1)$. Kiekvieną vektorių $\vec{a}(\vec{a}_1; \vec{a}_2)$ galima išreikšti šitaip:

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2.$$

P a v y z d y s. Įrodykite, kad trikampio vidurinė linija lygiagreti jo trečiajai kraštinei ir lygi jos pusei.

S p r e n d i m a s. Nagrinėkime trikampį ABC (265 pav.). Sakykime, $\overline{AB} = \vec{c}$, $\overline{BC} = \vec{a}$, $\overline{AC} = \vec{b}$. Tada, remiantis trikampio taisykle, $\vec{c} + \vec{a} = \vec{b}$ (48 skyrelis).



Sakykime, M ir N — trikampio ABC kraštinių AB ir BC vidurio taškai, tada $\overline{MN} = \overline{MB} + \overline{BN} = \frac{1}{2} \overline{AB} + \frac{1}{2} \overline{BC} = \frac{1}{2} \vec{c} + \frac{1}{2} \vec{a} = \frac{1}{2} (\vec{c} + \vec{a}) = \frac{1}{2} \vec{b}$.

Kadangi $\overline{AC} = \vec{b}$ ir $\overline{MN} = \frac{1}{2} \vec{b}$, tai $\overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{AC}$.

Vadinasi, $\overline{MN}$ vienakryptis su $\overline{AC}$, todėl $AC \parallel MN$.

Kadangi $\overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{AC}$, tai $MN = \frac{1}{2} AC$.

50. Vektorių skaliarinė sandauga. Vektorių $\vec{a}$ ($a_1; a_2$) ir $\vec{b}$ ($b_1; b_2$) skaliarinė sandauga vadiname skaičių $a_1b_1 + a_2b_2$. Vektorių skaliarinę sandaugą žymime taip pat, kaip ir skaičių sandaugą. Skaliarinę sandaugą $\vec{a} \cdot \vec{a}$ žymime $\vec{a}^2$. Aišku, kad

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2.$$

Iš vektorių skaliarinės sandaugos apibrėžimo išplaukia, kad, esant bet kokiems vektoriams $\vec{a}$ ($a_1; a_2$), $\vec{b}$ ($b_1; b_2$), $\vec{c}$ ($c_1; c_2$), teisinga lygybė

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c},$$

6.7 t. | Vektorių skaliarinė sandauga lygi jų ilgių ir kampo tarp vektorių kosinuso sandagai.

Sakykime, duoti vektoriai $\overline{AB}$ ir $\overline{CD}$, o kampas tarp jų α . Tada

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = AB \cdot CD \cos \alpha.$$



Iš teoremos išplaukia, kad vienas kitam statmenų vektorių skaliarinė sandauga lygi nuliui. Atvirkščiai, jei nenulinių vektorių skaliarinė sandauga lygi nuliui, tai jie vienas kitam statmeni.

266 paveiksle kampas tarp vektorių $\overrightarrow{OA}$ ir $\overrightarrow{OB}$ lygus 90° , taigi $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$. Jei žinoma, kad $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$, tai kampas tarp jų lygus 90° , t. y. tie vektoriai yra statmenose tiesėse.

1 p a v y z d y s. Duoti vektoriai $\vec{a}(1; 4)$ ir $\vec{b}(-3; 2)$. Raskite tokį skaičių λ , kad vektorius $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ ir $\vec{b}$ būtų statmenas vektoriui $\vec{b}$.

S p r e n d i m a s. Vektoriai $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ ir $\vec{b}$ statmeni, kai jų skaliarinė sandauga lygi 0.

Vektoriaus $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ koordinatės yra $(1 - 3\lambda; 4 + 2\lambda)$. Vektorių $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ ir $\vec{b}$ skaliarinė sandauga lygi

$$(1 - 3\lambda)(-3) + (4 + 2\lambda)2 = -3 + 9\lambda + 8 + 4\lambda = 5 + 13\lambda.$$

$$5 + 13\lambda = 0, \quad \text{t. y.} \quad \lambda = -\frac{5}{13}.$$

Taigi vektoriai $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ ir $\vec{b}$ statmeni, kai $\lambda = -\frac{5}{13}$.

2 p a v y z d y s. Įrodykite, kad lygiagretainio įstrižainių kvadratų suma lygi visų jo kraštinių kvadratų sumai.

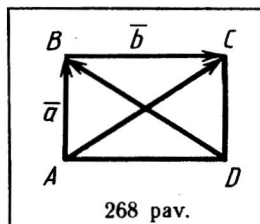
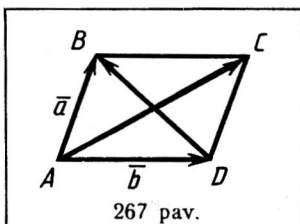
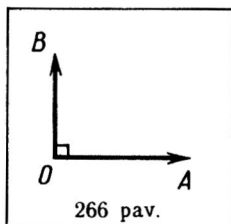
S p r e n d i m a s. Sakysime, $ABCD$ — lygiagretainis (267 pav.). Pažymėkime $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ($|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| = a$, $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}| = b$). Pagal vektorių sumos ir skirtumo apibrėžimą (žr. 48 skyrelį)

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}, \quad \overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}.$$

Remiantis skaliarinio kvadrato savybėmis,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{DB}^2 &= (\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 + \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = \\ &= 2\vec{a}^2 + 2\vec{b}^2, \quad \text{t. y.} \quad AC^2 + DB^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2. \end{aligned}$$

3 p a v y z d y s. Įrodykite, kad stačiakampio įstrižainės lygios.





S p r e n d i m a s. Sakykime, $ABCD$ — stačiakampis (268 pav.), jo kraštinės $AB=a$, $BC=b$. Pažymėję $\overline{AB}=\vec{a}$ ir $\overline{BC}=\vec{b}$, gau-
name:

$$\overline{AC}=\vec{a}+\vec{b}, \quad \overline{DB}=\vec{a}-\vec{b}.$$

$$\overline{AC}^2=(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2; \quad \overline{DB}^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2.$$

Remiantis skaliarinės sandaugos savybėmis, $\overline{AC}^2=AC^2$, $\overline{BD}^2=BD^2$, $\vec{a}^2=a^2$, $\vec{b}^2=b^2$. Be to, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, nes $a\perp b$ (pagal stačia-
kampio ir kampo tarp vektorių apibrėžimą). Vadinas, $AC^2=a^2+$
 $+b^2$ ir $DB^2=a^2+b^2$, t. y. $AC=BD$.

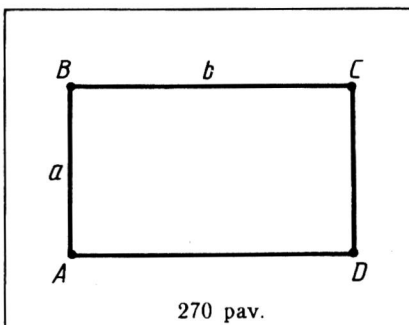
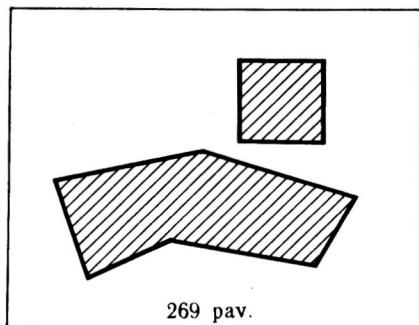
VII SKYRIUS. FIGŪRŲ PLOTAI

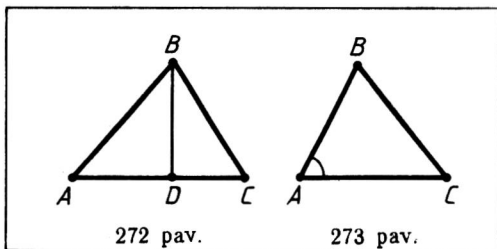
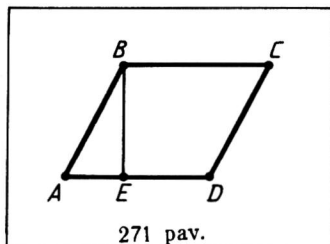
§ 14. Paprastųjų figūrų plotai

51. Ploto sąvoka. Mokykliniame geometrijos kurse figūros plo-
to sąvoka aiškinama dviejų žemės sklypų pavyzdžiu. Įsivaizduo-
kime du sklypus: vieną — kvadratinį, kitą — bet kokios formos
(269 pav.). Sakykime, abu sklypai apsėjami, pavyzdžiui, kviečiais.
Tarkime, kad pirmam sklypui apsėti prireikė m kg grūdų, o ant-
rajam — n kg grūdų. Natūralu laikyti, kad antras sklypas $\frac{n}{m}$
kartų didesnis už pirmąjį. Skaičių, kuris parodo, kiek kartų antras
sklypas yra didesnis už pirmąjį, vadinsime antro sklypo *plotu*.
Tokių atveju pirmas sklypas yra ploto matavimo *vienetas*.

Plotas turi tokias savybes:

- 1) Kiekviena figūra turi tam tikrą plotą.
- 2) Lygių figūrų plotai yra lygūs.
- 3) Visos figūros plotas lygus jos dalių plotų sumai.





Kalbėdami apie trikampio, lygiagretainio, trapecijos bei daugiakampio apskritai plotą, turėsime galvoje jų apribotų sričių, t. y. atitinkamų plokščiųjų daugiakampių, plotus. *Paprastąja* sritimi vadinsime sritį, kurią galima padalyti į baigtinį skaičių trikampių (trikampių sričių).

52. Daugiakampių plotai. *Stačiakampio plotas* apskaičiuojamas pagal formulę

$$S = a \cdot b;$$

čia a ir b — stačiakampio kraštinės. 270 paveiksle pavaizduotas stačiakampis $ABCD$, kurio kraštinės $AB = a$, $BC = b$. Jo plotas lygus

$$S = AB \cdot BC.$$

Lygiagretainio plotas lygus lygiagretainio kraštinės ir į ją nubrėžtos aukštinės sandaugai, t. y. apskaičiuojamas pagal formulę

$$S = ah;$$

čia a — kraštinė, h — į ją nubrėžta aukštinė. Lygiagretainio $ABCD$ (271 pav.) aukštinė BE . Lygiagretainio $ABCD$ plotas lygus AD ir BE sandaugai:

$$S = AD \cdot BE.$$

Trikampio plotas lygus pusės trikampio kraštinės ir į ją nubrėžtos aukštinės sandaugai, t. y. apskaičiuojamas pagal formulę

$$S = \frac{1}{2} ah.$$

BD — trikampio ABC (272 pav.) aukštinė. Trikampio ABC plotas lygus pusei jo kraštinės AC ir aukštinės BD sandaugos:

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD.$$



Trikampio plotą galima apskaičiuoti ir pagal kitas formules. Pavyzdžiui,

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin A;$$

čia AB ir AC — trikampio ABC kraštinės, o A — jo kampas (273 pav.). Kitaip šią formulę galima parašyti taip:

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A.$$

Pateiksime *Heron* (Heronas Aleksandrietis — senovės graikų mokslininkas, gyvenęs I a.) formulę:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

čia a, b, c — trikampio kraštinės, p — jo pusperimetris, t. y. $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Trapecijos plotas lygus jos pagrindų sumos pusės ir aukštinės sandaugai:

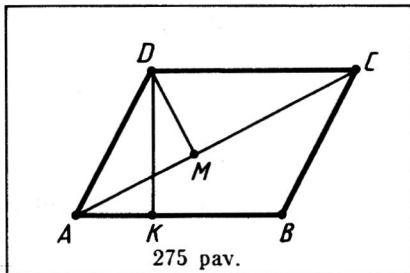
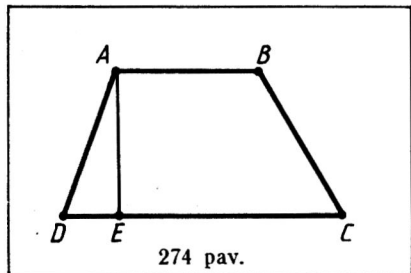
$$S = \frac{a+b}{2} h;$$

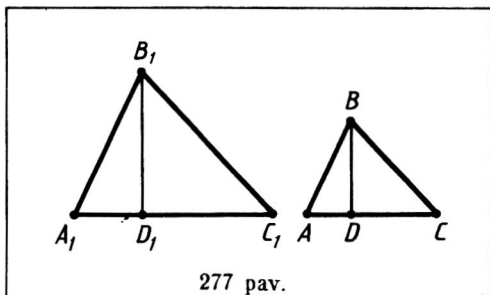
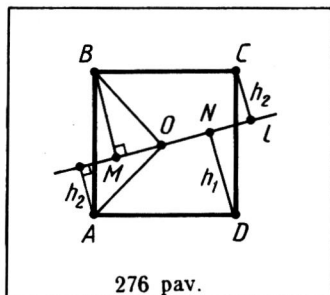
čia a ir b — trapecijos pagrindai, h — aukštinė.

Trapecijos $ABCD$ (274 pav.) pagrindai yra AB ir CD , AE — aukštinė. Trapecijos $ABCD$ plotas lygus jos pagrindų sumos pusės $\frac{AB+CD}{2}$ ir aukštinės AE sandaugai:

$$S = \frac{AB+CD}{2} \cdot AE.$$

1 pavyzdys. Duotas lygiagretainis $ABCD$. Jo kraštinė $AB=12$ cm, o įstrižainė $AC=16$ cm. Viršūnė D nuo įstrižainės





AC nutolusi 4 cm atstumu. Apskaičiuokite taško D atstumą iki tiesės AB .

Sprendimas. $S_{ABCD} = 2S_{ADC} = AC \cdot DM = 64 \text{ cm}^2$ (275 pav.).

Kadangi $S_{ABCD} = AB \cdot DK$, tai $DK = \frac{64}{12}$, t. y. $DK \approx 5,33 \text{ cm}$.

2 pavyzdys. Kvadrato $ABCD$ kraštinė lygi a . Per jo simetrijos centrą O nubrėžta tiesė l , kuri kerta kraštinę AB (l neina per taškus A ir B). Išreikškite kvadrato viršūnių B ir C atstumų iki tiesės l sumą ilgiais a ir b ; čia b — tiesės l atkarpos, esančios kvadrato viduje, ilgis.

Sprendimas. Ieškomą sumą pažymėkime c , tada, remiantis centrine simetrija (276 pav.), $c = 2(h_1 + h_2)$; $S_{AOB} = 0,25a^2$, $S_{AOB} = 0,5 \cdot MO(h_1 + h_2) = 0,25b(h_1 + h_2)$.

Todėl $0,25a^2 = 0,25b(h_1 + h_2)$, ir $c = \frac{2a^2}{b}$.

§ 15. Skritulio plotas

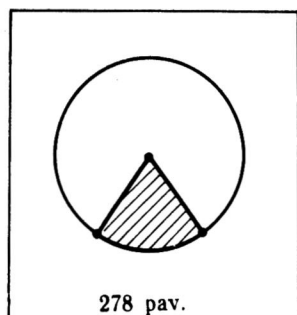
53. Panašiųjų figūrų plotai. Sakykime, F_1 ir F_2 — dvi panašios paprastosios figūros.

Panašiųjų figūrų plotų santykis lygus jų atitinkamų matmenų santykio kvadratui.

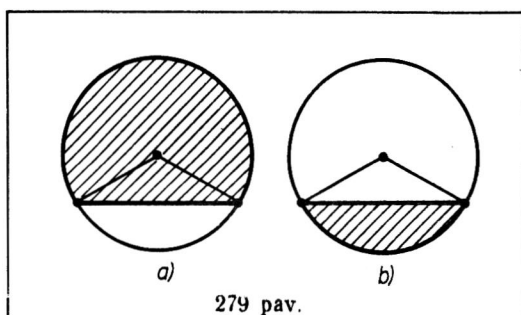
Sakykime, ABC ir $A_1B_1C_1$ — du panašūs trikampiai (277 pav.). Jei panašumo koeficientas lygus k , tai trikampio $A_1B_1C_1$ matmenys k kartų didesni už atitinkamus trikampio ABC matmenis. Vadinasi, trikampio $A_1B_1C_1$ kraštinė ir aukštinė k kartų didesnės už atitinkamus trikampio ABC kraštinę ir aukštinę:

$$A_1B_1 = kAB, B_1C_1 = kBC, A_1C_1 = kAC, B_1D_1 = kBD.$$

$$S_{\triangle A_1B_1C_1} = k^2 S_{\triangle ABC}.$$



278 pav.



279 pav.

54. Skritulio plotas. Apie skritulį apibrėžto iškilojo daugia-
kampio plotas apskaičiuojamas pagal formulę $S = \frac{pr}{2}$; čia p —
perimetras (daugiakampio kraštinių ilgių suma), o r — skritulio
spindulys.

Skritulio plotas apskaičiuojamas pagal formulę

$$S = \pi R^2;$$

čia R — skritulio spindulys.

Skritulio išpjova vadiname skritulio dalį, esančią atitinkamo
centrinio kampo viduje (278 pav.).

Skritulio išpjovos plotas apskaičiuojamas pagal formulę

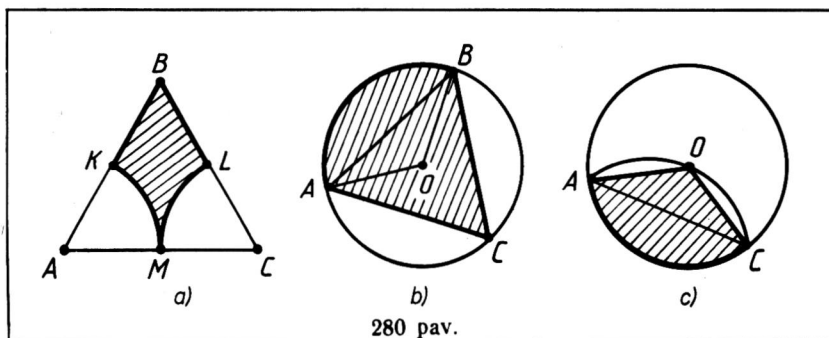
$$S = \frac{\pi R^2}{360} \alpha;$$

čia R — skritulio spindulys, o α — atitinkamo centrinio kampo
laipsninis matas.

Skritulio nuopjova vadiname skritulio ir pusplokštumės bend-
rąją dalį (279 pav.). *Nuopjovos*, nelygios pusskrituliui, plotas ap-
skaičiuojamas pagal formulę

$$S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha \pm S_{\Delta};$$

čia α — centrinio kampo, kuriame yra tos nuopjovos lankas, laips-
ninis matas, o S_{Δ} — trikampio, kurio viršūnės yra skritulio cent-
ras ir atitinkamą išpjovą ribojančių spindulių galai, plotas. Ženklą
„—“ reikia imti tada, kai $\alpha < 180^\circ$ (279b pav.), o ženklą „+“ ta-
da, kai $\alpha > 180^\circ$ (279a pav.).



280 pav.

1 pavyzdys. Išmatavę, ką reikia, apskaičiuokite 280 paveiksle pavaizduotų figūrų plotus.

Sprendimas. a) Laikykite, kad ABC — taisyklingas trikampis (280a pav.), taškai K ir L — jo kraštinių vidurio taškai, AKM ir CML — išpjovos, kurių kiekvienos lankas lygus 60° . Tada

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi a^2}{12} = \frac{a^2}{4} \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right) \approx 0,17a^2;$$

čia a — trikampio ABC kraštinė.

Kai $a \approx 16$ mm, tai $S \approx 44$ mm².

b) Laikykite, kad AOB — išpjova, kurios lankas lygus 120° , O — apskritimo centras (280b pav.). Tada

$$S = \frac{\pi R^2}{3} + R^2 \sin 120^\circ = \frac{R^2}{6} (2\pi + 3\sqrt{3}) \approx 1,91R^2;$$

čia R — apskritimo spindulys.

Kai $R \approx 8$ mm, tai $S \approx 122$ mm².

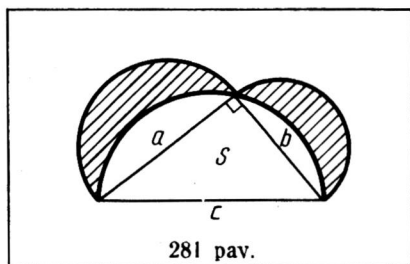
c) Laikykite, kad lankas AOC (280c pav.) eina per apskritimo centrą O , jo spindulys lygus apskritimo spinduliui ir $\angle AOC = 120^\circ$. Tada

$$S = 2 \left(\frac{\pi R^2}{3} - \frac{1}{2} R^2 \sin 120^\circ \right) \approx 1,21R^2;$$

čia R — apskritimo spindulys.

Kai $R \approx 8$ mm, tai $S \approx 78$ mm².

2 pavyzdys. Įrodykite, kad dviejų subrūkšniuotų sričių (281 pav.) plotų suma lygi stačiojo trikampio ABC plotui.

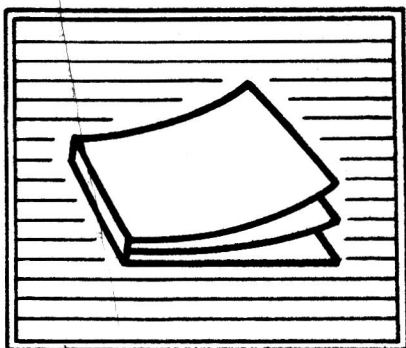


Sprendimas. Stačiojo trikampio ABC statinius pažymėkime a ir b , įžambinę c , subrūkšniuotų figūrų plotų sumą S . Pagal Pitagoro teoremą $a^2 + b^2 = c^2$, todėl $a^2 + b^2 - c^2 = 0$. Tada

$$S = \frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi b^2}{8} - \left(\frac{\pi c^2}{8} - S_{\triangle ABC} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{8} (a^2 + b^2 - c^2) + S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABC}.$$

PRIEDAI



Pagrindinės formulės ir sąsajos	240
Dalykinė rodyklė	251



PAGRINDINĖS FORMULĖS IR SĄSAJOS

ALGEBRA

I. Pagrindiniai algebros dėsniai

Bet kuriems realiesiems skaičiams a, b, c teisingos lygybės:

$$a+b=b+a \text{ (sudėties perstatymo dėsnis),}$$

$$a+(b+c)=(a+b)+c \text{ (sudėties jungimo dėsnis),}$$

$$a+0=a,$$

$$a+(-a)=0,$$

$$ab=ba \text{ (daugybės perstatymo dėsnis),}$$

$$a(bc)=(ab)c \text{ (daugybės jungimo dėsnis),}$$

$$a(b+c)=ab+ac \text{ (skirstymo dėsnis),}$$

$$a \cdot 1=a,$$

$$a \cdot \frac{1}{a}=1 \text{ (} a \neq 0 \text{).}$$

II. Dalyba su liekana

Jei m, n, p, r — natūralieji skaičiai, ir m — dalinys, n — daliklis, p — dalmuo, o r — liekana, tai

$$m=np+r.$$

III. Skaitinės nelygybės

Jei $a>b$, tai $b<a$.

Jei $a>b$ ir $b>c$, tai $a>c$.

Jei $a>b$, tai $a+c>b+c$.

Jei $a>b$ ir $c>0$, tai $ac>bc$.

Jei $a>b$ ir $c<0$, tai $ac<bc$.

Jei $a>b$ ir $c>d$, tai $a+c>b+d$.

Jei $a>0, b>0, c>0, d>0$, be to, $a>b$ ir $c>d$, tai $ac>bd$.

Jei $a>b>0$ ir n — natūralusis skaičius, tai $a^n>b^n$.

IV. Realiojo skaičiaus modulis ir modulių savybės

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{kai } a \geq 0, \\ -a, & \text{kai } a < 0 \end{cases} \text{ (modulio apibrėžimas).}$$

$$|a| \geq 0, \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0,$$

$$|a| = |-a|,$$

$$|ab| = |a| \cdot |b|, \quad |a|^2 = a^2.$$

V. Atstumas $\rho(A; B)$ tarp taškų A ir B

1) tarp dviejų koordinačių tiesės taškų $A(a)$ ir $B(b)$:

$$\rho(A; B) = |a - b|;$$

2) tarp dviejų koordinačių plokštumos taškų $A(x_1; y_1)$ ir $B(x_2; y_2)$:

$$\rho(A; B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

VI. Skaidymas dauginamaisiais

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2,$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2,$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3,$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);$$

čia x_1 ir x_2 — lygties $ax^2 + bx + c = 0$ šaknys.

VII. Aritmetinė šaknis ir jos savybės

Jei $a \geq 0$, tai užrašas $\sqrt[n]{a} = x$ reiškia: 1) $x \geq 0$; 2) $x^n = a$ (aritmetinės šaknies apibrėžimas).

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b},$$

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k},$$

$$\sqrt[nm]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^k},$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a},$$

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

VIII. Laipsnis su racionaliuoju rodikliu

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n, \quad a^1 = a$ (laipsnio su natūraliuoju rodikliu apibrėžimas),



$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$, kai $a > 0$ (laipsnio su teigiamuoju trupmeniniu rodikliu apibrėžimas),

$a^0 = 1$, kai $a \neq 0$ (laipsnio su nuliniu rodikliu apibrėžimas),

$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$, kai $a > 0$ (laipsnio su neigiamuoju racionaliuoju rodikliu apibrėžimas);

$$\begin{aligned} a^{r_1} \cdot a^{r_2} &= a^{r_1+r_2}, & (a^{r_1})^{r_2} &= a^{r_1 r_2}, & \left(\frac{a}{b}\right)^r &= \frac{a^r}{b^r}. \\ a^{r_1} : a^{r_2} &= a^{r_1-r_2}, & (ab)^r &= a^r b^r, \end{aligned}$$

IX. Kvadratinė lygtis $ax^2 + bx + c = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ (kvadratinės lygties šaknų formulė).}$$

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}; \text{ čia } k = \frac{b}{2} \text{ (kvadratinės lygties, kai } b \text{ — lyginis skaičius, šaknų formulė).}$$

Vieto teorema. Jei x_1 ir x_2 — redukuotosios kvadratinės lygties $x^2 + px + q = 0$ šaknys, tai

$$x_1 + x_2 = -p,$$

$$x_1 x_2 = q.$$

X. Teigiamojo sveikąjo skaičiaus standartinė išraiška

$$a = a_1 \cdot 10^n;$$

čia $1 \leq a_1 < 10$, n — sveikasis skaičius (skaičiaus a eilė).

XI. Paklaidos

Jei a — skaičiaus α apytikslė reikšmė, tai $|\alpha - a|$ — absoliučioji paklaida, $\frac{|\alpha - a|}{|\alpha|} \cdot 100\%$ — santykinė paklaida.

XII. Logaritmai

Užrašas $\log_a b = x$ reiškia, kad $a^x = b$; čia $a > 0$, $a \neq 1$ (logaritmo apibrėžimas).

$\lg b$ — tai trumpiau užrašytas $\log_{10} b$ (dešimtainis logaritmas).

$\lg 1 = 0$, $\lg 10 = 1$, $\lg 100 = 2$, $\lg 1000 = 3$, ..., $\lg 10^n = n$.



$$\lg 0,1 = -1, \lg 0,01 = -2, \lg 0,001 = -3, \dots, \lg 10^{-n} = -n.$$

$$\log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2,$$

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2,$$

$$\log_a x_1^r = r \log_a x_1 \quad (x_1 > 0, x_2 > 0),$$

$$a^{\log_a b} = b.$$

XIII. Aritmetinė progresija

$$a_{n+1} = a_n + d \quad (\text{aritmetinės progresijos apibrėžimas}),$$

$$a_n = a_1 + d(n-1) \quad (n\text{-tojo nario formulė}),$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad (\text{charakteristinė savybė}),$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

(pirmųjų n narių sumos formulė).

XIV. Geometrinė progresija

$$b_{n+1} = b_n \cdot q, \quad b_1 \neq 0, \quad q \neq 0 \quad (\text{geometrinės progresijos apibrėžimas}),$$

$$b_n = b_1 q^{n-1} \quad (n\text{-tojo nario formulė}),$$

$$b_n = b_{n-1} \cdot b_{n+1} \quad (\text{charakteristinė savybė}),$$

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1} = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad (\text{pirmųjų } n \text{ narių sumos formulė}),$$

$$S = \frac{b_1}{1 - q} \quad (\text{begalinės geometrinės progresijos, kurios } |q| < 1, \text{ sumos formulė}).$$

XV. Trigonometrija

1. Trigonometrinių funkcijų savybės:

$$\sin(-x) = -\sin x,$$

$$\cos(-x) = \cos x,$$

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x,$$

$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x,$$

$$\sin(x + 2\pi k) = \sin x, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\cos(x + 2\pi k) = \cos x, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\operatorname{tg}(x + \pi k) = \operatorname{tg} x, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



2. Kai kurių kampų trigonometrinių funkcijų reikšmių lentelė:

Funkcija	Argumentas α						
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0

Kampo laipsninio ir radianinio matų ryšys:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad.}$$

3. Formulės, siejančios to paties argumento trigonometrines funkcijas:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

4. Dvigubojo kampo formulės:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

5. Laipsnio žeminimo formulės:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2};$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

6. Argumentų sudėties formulės:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta;$$



$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

7. Trigonometrinių funkcijų sudėties formulės:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

8. Trigonometrinių funkcijų ženklai ketvirčiuose:

Funkcija	Ketvirtis			
	I	II	III	IV
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tg	+	-	+	-
ctg	+	-	+	-

9. Redukcijos formulės:

Funkcija	Argumentas t						
	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$
$\sin t$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos t$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} t$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} t$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$



GEOMETRIJA

Geometrijos aksiomos

Pagrindinės taškų ir tiesių priklausymo savybės

A—I₁. Kad ir kokia būtų tiesė, yra taškų, priklausančių tai tiesei, ir taškų, nepriklausančių tai tiesei.

A—I₂. Per bet kuriuos du taškus galima nubrėžti vieną ir tik vieną tiesę.

Taškų padėties tiesėje ir plokštumoje pagrindinės savybės

A—II₁. Iš trijų tiesės taškų vienas ir tik vienas yra tarp kitų dviejų.

A—II₂. Tiesė dalija plokštumą į dvi pusplokštumes.

Atkarpų ir kampų matavimo pagrindinės savybės

A—III₁. Kiekviena atkarpa turi tam tikrą ilgį, didesnį už nulį. Atkarpos ilgis lygus atkarpų, į kurias ją dalija bet kuris taškas, ilgių sumai.

A—III₂. Kiekvienas kampas turi laipsninį matą, didesnį už nulį. Ištiesinis kampas lygus 180° . Kampo laipsninis matas lygus kampų, į kuriuos jį dalija bet kuris tarp jo kraštinių einantis spindulys, laipsninių matų sumai.

Atkarpų ir kampų atidėjimo pagrindinės savybės

A—IV₁. Kiekvienoje pustiesėje nuo jos pradžios taško galima atidėti vieną ir tik vieną duoto ilgio atkarpą.

A—IV₂. Prie kiekvienos pustiesės nurodytoje pusplokštumėje galima atidėti vieną ir tik vieną kampą, turintį duotą laipsninį matą, mažesnį už 180° .

Trikampio, lygaus duotajam, egzistavimas

A—IV₃. Kad ir koks būtų trikampis, yra jam lygus trikampis, kurio padėtis duotos pustiesės atžvilgiu yra iš anksto nurodyta.

Lygiagrečių tiesių pagrindinė savybė

A—V. Plokštumoje per tašką, nepriklausantį duotai tiesei, galima nubrėžti ne daugiau kaip vieną tiesę, lygiagrečią tai tiesei.



I. Trikampiai

a, b, c — trikampio kraštinės.

α, β, γ — trikampio kampai.

α', β', γ' — trikampio priekampiai.

h_a, h_b, h_c — trikampio aukštinės, nuleistos iš trikampio viršūnių į tieses, kuriose yra atitinkamos priešais esančios kraštinės a, b, c .

m_a, m_b, m_c — trikampio pusiau-kraštinės, jungiančios trikampio viršūnes su priešais esančių kraštinių a, b, c vidurio taškais.

l_a, l_b, l_c — trikampio pusiaukampinės, jungiančios trikampio viršūnes su priešais esančių kraštinių a, b, c taškais.

MN — trikampio vidurinė linija.

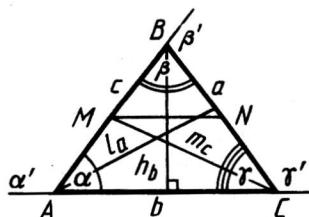
P — trikampio perimetras.

p — trikampio pusperimetris.

R — apie trikampį apibrėžto apskritimo spindulys.

r — į trikampį įbrėžto apskritimo spindulys.

$S_{\Delta ABC}$ — trikampio ABC plotas.



Trikampio kampų suma

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Trikampio priekampių savybės

$$\alpha' = \beta + \gamma, \quad \beta' = \alpha + \gamma, \quad \gamma' = \alpha + \beta; \quad \alpha' > \beta,$$

$$\alpha' > \gamma; \quad \beta' > \alpha, \quad \beta' > \gamma; \quad \gamma' > \alpha, \quad \gamma' > \beta.$$

Trikampio nelygybė

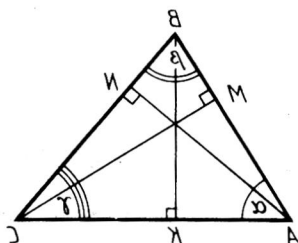
$$a < b + c, \quad b < a + c, \quad c < a + b.$$

Sinusų teorema

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Kosinusų teorema

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$



*Trikampio perimetras ir pusperimetris*

$$P = a + b + c, \quad p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Trikampio vidurinės linijos savybės

$$MN \parallel AC, \quad MN = \frac{b}{2}.$$

Trikampio plotas

$$S = \frac{1}{2} ah_a; \quad S = \frac{1}{2} bh_b; \quad S = \frac{1}{2} ch_c;$$

$$S = \frac{1}{2} ac \sin \beta, \quad S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma, \quad S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} - \text{Heronio formulė}$$

Lygiašonis trikampis

$$a = c; \quad \angle \alpha = \angle \gamma;$$

$$h_b = m_b = l_b.$$

Lygiakraštis trikampis

$$a = b = c; \quad \alpha = \beta = \gamma = 60^\circ;$$

$$h_a = l_a = m_a; \quad h_b = l_b = m_b; \quad h_c = l_c = m_c;$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}; \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}; \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Statusis trikampis

$$\alpha = 90^\circ, \quad b, c - \text{statiniai}, \quad a - \text{ižambinė},$$

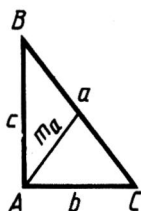
$$a^2 = b^2 + c^2 - \text{Pitagoro teorema}.$$

$$R = \frac{a}{2} = m_a;$$

$$S = \frac{1}{2} bc;$$

$$\sin \gamma = \frac{c}{a}; \quad \cos \gamma = \frac{b}{a}; \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{c}{b};$$

$$\sin \beta = \frac{b}{a}; \quad \cos \beta = \frac{c}{a}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{c}.$$





II. Keturkampiai

Lygiagretainis

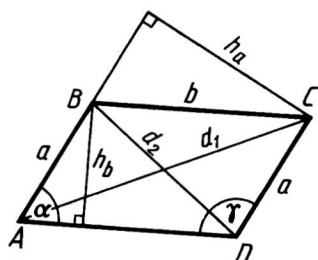
a, b — lygiagretainio kraštinės.

h_a, h_b — lygiagretainio aukštinės, nuleistos iš lygiagretainio viršūnių į tieses, yra lygiagretainio kraštinės a, b .

d_1, d_2 — lygiagretainio įstrižainės.

α, γ — lygiagretainio kampai

$$\alpha + \gamma = 180^\circ.$$



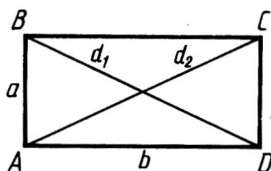
Lygiagretainio plotas

$$S = ah_a, \quad S = bh_b, \quad S = ab \sin \alpha.$$

Lygiagretainio kraštinių ir įstrižainių ryšys

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Stačiakampis

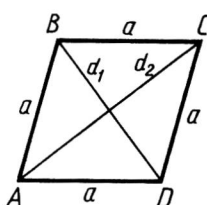


$$\alpha = \gamma = 90^\circ;$$

$$d_1 = d_2;$$

$$S = ab.$$

Rombas



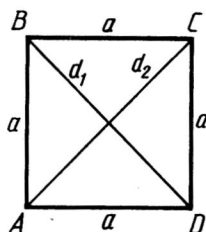
$$d_1 \perp d_2;$$

$$S = a^2 \sin \alpha;$$

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2;$$

$$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2.$$

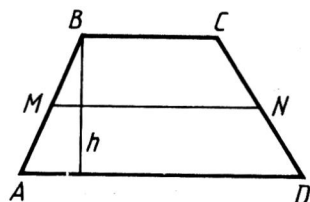
Kvadratas



$$\alpha = \gamma = 90^\circ;$$

$$d_1 = d_2; \quad d_1 \perp d_2;$$

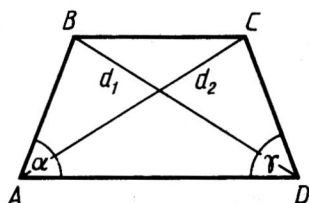
$$S = a^2$$



Trapecija

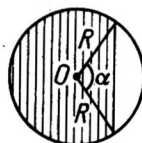
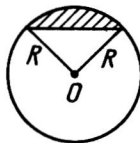
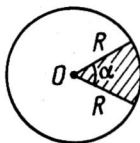
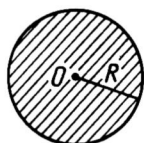
$$MN = \frac{a+b}{2} \text{ — trapecijos vidurinė linija;}$$

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$



Lygiašonė trapezija
 $AB=CD$; $\alpha=\gamma$; $d_1=d_2$.

III. Apskritimas ir skritulys



R — apskritimo (skritulio) spindulys.

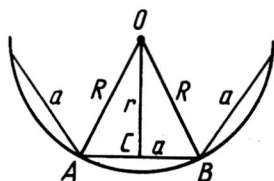
$l=2\pi R$ — apskritimo ilgis.

$S=\pi R^2$ — skritulio plotas.

$S_{\text{išp.}} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$ — skritulio išpjovos plotas.

$S_{\text{nuop.}} = \frac{\pi R^2}{360} \alpha \pm S_{\Delta}$ — skritulio nuopjovos plotas.

IV. Taisyklingieji daugiakampiai



$$S = \frac{1}{2} R^2 \cdot n \cdot \sin \frac{360^\circ}{n};$$

$$R = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}; \quad r = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}.$$

Zemiau pateiktoje lentelėje α — daugiakampio vidaus kampas.
 R — apibrėžtinio apskritimo spindulys, r — įbrėžtinio apskritimo spindulys.

Taisyklingojo daugiakampio rūšis	α	R	r	Kampų suma
Trikampis	60°	$\frac{a}{\sqrt{3}}$	$\frac{a}{2\sqrt{3}}$	180°
Keturkampis	90°	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{2}$	360°
Šešiakampis	120°	a	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	720°

DALYKINĖ RODYKLĖ

- Abscisė 61, 210
Aksioma 163
Antilogarit mavimas 82
Apibrėžimas
 analizinis funkcijos – 59
 analizinis sekos – 134
 funkcijos – lentelė 60
 rekurentinis sekos – 134
 žodinis sekos – 135
Apskritimai
 besiliečiantys – 178
Apskritimas 167
 apibrėžtinis – 186, 201
 įbrėžtinis – 186, 201
Apvalinimas 38
Argumentas
 funkcijos – 59
Artinys
 skaičiaus dešimtainis – 40
Ašis
 abscisių – 61
 figūros simetrijos – 218
 ordinačių – 61
 parabolės simetrijos – 87
 simetrijos – 218
Atėminys 9
Atimtis
 dešimtainių trupmenų – 21
 paprastųjų trupmenų – 18
 racionaliųjų trupmenų – 53
Atkarpa 165
 kryptinė – 225
Aukštinė
 lygiagretainio – 195
 trapecijos – 198
 trikampio – 179
Bendravediklinimas
 trupmenų – 16
Centras
 apskritimo – 167
 figūros simetrijos – 218
 homotetijos – 219
 posūčio – 220
 simetrijos – 217
 skritulio – 167
Charakteristika
 dešimtainio logaritmo – 83
Dalyba
 dešimtainių trupmenų – 22
 paprastųjų trupmenų – 18
 racionaliųjų trupmenų – 53
Daliklis 9
 bendrasis – 13
 didžiausiasis bendrasis – 13
Dalinys 9
Dalis
 skaičiaus sveikoji – 74
 skaičiaus trupmeninė – 74
Dalmuo 9
Daugiakampis 199
 apibrėžtinis – 201
 įbrėžtinis – 201
 iškilasis – 199
 plokščiasis – 199
 taisyklingasis – 200
Daugianaris 45, 49
Daugyba
 dešimtainių trupmenų – 21
 paprastųjų trupmenų – 18
 racionaliųjų trupmenų – 53
Daugiklis
 papildomasis – 52
Dauginamasis 9
Dėmuo 9
Diskriminantas
 kvadratinės lygties – 92
Eilė
 skaičiaus – 35
Formulė
 aritmetinės progresijos n narių sumos – 136
 aritmetinės progresijos n -tojo nario – 136
 atstumo tarp dviejų koordinačių taškų – 212
 begalinės geometrinės progresijos, kurios $|q| < 1$, sumos – 139
 geometrinės progresijos n narių sumos – 137
 geometrinės progresijos n -tojo nario – 137
Figūra
 geometrinė – 161
 –, simetriška centro atžvilgiu 218
 –, simetriška tiesės atžvilgiu 218
Figūros
 homotetiškosios – 219
 panašiosios – 223

**Formulės**

- argumentų sudėties ir atimties – 146
- dvigubojo kampo – 150
- greitosios daugybos – 47
- laipsnio žeminimo – 151
- redukcijos – 147
- , siejančios to paties argumento trigonometrines funkcijas 148
- trigonometrinių funkcijų sumos keitimo sandauga – 151

Funkcija 59

- apgretijamoji – 77
- atvirkštinė – 78
- didėjančioji – 64
- kvadratinė – 86
- laipsninė – 70, 71, 73, 74
- lyginė – 63
- logaritminė – 79
- mažėjančioji – 64
- nelyginė – 63
- pastovioji – 65
- rodiklinė – 75
- tiesinė – 66
- trigonometrinė – 144

Galai

- atkarpos – 165

Geometrija 161

- absoliučioji – 174
- euklidinė – 161
- Lobačevskio – 174

Grafikas

- analiziškai apibrėžtos funkcijos – 62
- atvirkštinės funkcijos – 78
- atvirkštinio proporcingumo – 69
- funkcijos $[x]$ – 75
- funkcijos $\{x\}$ – 75
- kvadratinės funkcijos – 87
- laipsninės funkcijos – 71
- lyginės funkcijos – 63
- lygties su dviem kintamaisiais – 108
- logaritminės funkcijos – 79
- nelyginės funkcijos – 63
- pastoviosios funkcijos – 65
- rodiklinės funkcijos – 76
- tiesinės funkcijos – 66
- tiesinės lygties su dviem kintamaisiais – 108
- tiesioginio proporcingumo – 65
- trigonometrinių funkcijų – 144

Grandis

- laužtės – 198

Grupavimas 48**Ilgis**

- apskritimo – 203
- atkarpos – 165

laužtės – 199**vektoriaus – 226****Intervalas 31****Istrižainė 194, 199.****Iškėlimas**

- bendro dauginamojo – už skliaustų 47
- dauginamojo – prieš šaknies ženklą 56

Išpjova**skritulio – 236****Išraiška**

- daugianario standartinė – 45
- teigiamojo skaičiaus standartinė – 35
- vienanario standartinė – 45

Išskyrimas**pilnojo kvadrato – 86****Ištempis****grafiko – 84****Ižambinė 184****Judesys 219****Kampai**

- gretutiniai – 171
- kryžminiai – 171
- lygieji – 181
- papildomieji – 170
- vidaus priešiniai – 175
- vidaus vienašaliai – 175

Kampainis 187**Kampas 168**

- bukasis – 169
- centrinis – 171
- įbrėžtinis – 172
- iškilojo daugiakampio – 199
- iškilojo keturkampio – 194
- ištiestinis – 168
- plokščiasis – 170
- smailusis – 169
- statusis – 169
- trikampio – 179

Kartotinis 9

- bendrasis – 14
- mažiausiasis bendrasis – 14

Keturkampis 193**iškilasis – 194****Ketvirtis****koordinatų plokštumos – 210****Kintamasis 14, 59****Kirstinė 175****Koeficientas 45, 91**

- atvirkštinio proporcingumo – 68
- homotetijos – 219
- panašumo – 222
- tiesės krypties – 67
- tiesioginio proporcingumo – 65

- Koordinatė**
taško – tiesėje 27
- Koordinatės**
dekartinės – 211
taško – 210
vektoriaus – 227
- Kosinusas** 142
- Kraštinė**
daugiakampio – 199
kampio – 168
keturkampio – 193
trikampio – 178
- Kvadratas** 196
- Laipsnis** 12, 34, 35, 37, 169
daugianario – 49
vienanario – 45
- Lankas**
apskritimo – 171
- Laužtė** 198
paprastoji – 198
uždaroji – 198
- Liekana** 10
- Liestinė** 178
- Lietimasis**
išorinis apskritimų – 178
vidinis apskritimų – 178
- Lygiagretainis** 194
- Lygtis** 90
apskritimo – 212
bikvadratinė – 97
figūros – 212
iracionalioji – 100
kvadratinė – 92
logaritminė – 103
racionalioji – 95
rodiklinė – 102
– su dviem kintamaisiais 107
– su kintamuoju vardiklyje 94
– su parametru 106
– su vienu kintamuoju 90
sveikoji – 95
tiesės – 214
tiesinė – su dviem kintamaisiais 108
tiesinė – su vienu kintamuoju 91
trigonometrinė – 153
trupmeninė – 95
- Lygumas**
atkarpa – 181
figūrų – 220
kampų – 181
trikampių – 181
vektorių – 226
- Linija**
trapecijos vidurinė – 197
trikampio vidurinė – 180
- Liniuotė** 187
- Logaritmas** 80
dešimtainis – 82
Logaritmvavimas 82
- Mantisė**
dešimtainio logaritmo – 83
- Matas**
apskritimo lanko laipsninis – 171
laipsninis kampas – 169
radianinis kampas – 203
- Matlankis** 187
- Metodas**
keitimo – 110
kėlimo laipsniu – 100
naujo kintamojo įvedimo – 96
naujų kintamųjų įvedimo – 112
priešingosios prielaidos – 163
skaidymo dauginamaisiais – 95
sudėties – 110
- Narys**
daugianario laisvasis – 49
daugianario vyriausiasis – 49
kraštinis proporcijos – 34
kvadratinės lygties laisvasis – 92
vidurinis proporcijos – 34
- Nariai**
panašieji – 45
- Nelygybė**
griežtoji – 29
Koši – 132
logaritminė – 128
negriežtoji – 29
rodiklinė – 128
skaitinė – 30
– su dviem kintamaisiais 130
– su moduliais 124
– su vienu kintamuoju 117
tiesinė – 118
tiesiškai trupmeninė – 120
trikampio – 180
- Nelygybės**
ekvivalenčiosios – 117
- Nuopjova**
skritulio – 236
- Ordinatė** 61, 210
- Ortas** 229
- Pabaiga**
vektoriaus – 226
- Pagrindas**
laipsnio – 12, 34
lygiašonio trikampio – 182
logaritmo – 80
pasvirusios – 177
statmens – 177
trapecijos – 197



- Panaikinimas
iracionalybės vardiklyje – 58
- Parabolė 63, 85
kubinė – 70
- Paklaida
absoliučioji – 39
santykinė – 39
- Pasviroji 177
- Perimetras
trikampio – 248
- Periodas
begalinės dešimtainės periodinės trupmenos – 25
- Pertvarkymas
tapatusis – 44
- Planimetrija 161
- Plokštuma
koordinatų – 61
skaičių – 61
- Plotas 232
kvadrato – 249
lygiagretainio – 233
rombo – 249
skritulio – 236
skritulio išpjovos – 236
skritulio nuopjovos – 236
stačiakampio – 233
taisyklingo daugiakampio – 250
trapecijos – 234
trikampio – 233
- Postūmis
lygiagretusis – 224
- Posūkis 220
- Potencijavimas 82
- Požymis
dalumo – 11, 12
- Pradžia
koordinatų – 61
pustiesės – 166
spindulio – 166
vektoriaus – 226
- Prastinimas
paprastųjų trupmenų – 16
racionaliųjų trupmenų – 51
- Priekampis
iškielo daugiakampio – 200
trikampio – 183
- Procentas 23
- Progresija
aritmetinė – 135
geometrinė – 137
- Projekcija
pasvirosios – 177
- Proporcija 34
- Proporcingumas
atvirkštinis – 68
tiesioginis – 65
- Pusašė
neigiamoji – 210
teigiamoji – 210
- Pusiaukampinė
kampio – 169
trikampio – 179
- Pusiaukraštinė
trikampio – 179
- Pusplokštumė 169
- Pustiesė 166
- Pustiesės
papildomosios – 166
priešpriešės – 226
vienakryptės – 226
- Radianas 203
- Radikalas 36
- Reiškinys
algebrinis – 42
algebrinis iracionalusis – 43
algebrinis racionalusis – 43
algebrinis trupmeninis – 42
jungtinis – 58
skaitinis – 10
trigonometrinis – 145
- Reiškmė
algebrinio reiškinių – 43
funkcijos – 59
raidės – 14
skaičiaus apytikslė – 38
- Reiškmės
atitinkamosios reiškinių – 44
leistinosios kintamųjų – 43
- Reiškiniai
tapačiai lygūs – 44
- Rodiklis
laipsnio – 34
šaknies – 36
- Rombas 196
- Sandauga
skaičių – 9
vektoriaus ir skaičiaus – 229
vektorių skalarinė – 230
- Sąspūdis
grafiko – 84
- Savybė
daugybės jungimo – 9
daugybės perstatymo – 9
paprastosios trupmenos pagrindinė – 16
racionaliosios trupmenos pagrindinė – 50
sudėties jungimo – 9
sudėties perstatymo – 9
- Savybės
aritmetinės progresijos – 136
aritmetinių šaknų – 36
aritmetinių veiksmų – 33



- geometrinės progresijos – 137
laipsnio su natūraliuoju rodikliu – 34
laipsnio su racionaliuoju rodikliu – 38
logaritmų – 80
modulio – 32
skaitinių nelygybių – 30
- Seka**
didėjančioji – 135
mažėjančioji – 135
pastovioji – 135
skaičių – 134
- Simetrija**
ašinė – 218
centrinė – 217
- Sinusas** 141
- Sistema**
lygčių – 109
nelygybių – 118
- Sistemos**
ekvivalenčiosios lygčių – 109
- Skaičiai**
iracionalieji – 28
mišrieji – 15
natūralieji – 9
neigiamieji – 27
pirminiai – 12
priešingieji – 27
racionalieji – 27
realieji – 29
sudėtiniai – 12
sveikieji – 27
tarpusavy pirminiai – 13
teigiamieji – 27
- Skaičius**
logaritmuojamasis – 80
pošaknio – 36
- Skaidymas**
daugianario – dauginamaisiais 47
kvadratinio trinario – dauginamaisiais 49
natūraliojo skaičiaus – dauginamaisiais 12
- Skaitiklis**
trupmenos – 15
- Skaitmenys**
reikšminiai – 20
- Skersmuo**
apskritimo – 167
- Skirtumas**
aritmetinės progresijos – 135
skaičių – 9
vektorių – 228
- Skriestuvai** 187
- Skritulys** 167
- Spindulys** 166
- apskritimo – 167
atvirasis – 31
skaičių – 31
skritulio – 167
tarp kampo kraštinių einantis – 169
- Sprendimas**
antrojo laipsnio nelygybės grafinis – 122
lygčių sistemos grafinis – 113
lygties su vienu kintamuoju grafinis – 104
trikampių – 208
- Sprendinys**
lygčių sistemos – 109
lygties su dviem kintamaisiais – 107
nelygybės su dviem kintamaisiais – 130
nelygybės su vienu kintamuoju – 117
nelygybių sistemos – 118
- Sritis**
algebrinio reiškinių apibrėžimo – 43
daugiakampė – 199
funkcijos apibrėžimo – 59
- Stačiakampis** 196
- Statinis** 184
- Statmuo**
– tiesei 177
vidurio – 177
- Stereometrija** 161
- Styga**
apskritimo – 167
- Sudėtis**
dešimtinių trupmenų – 21
paprastųjų trupmenų – 18
racionaliųjų trupmenų – 53
vektorių – 227
- Suma**
skaičių – 9
vektorių – 227
- Sutraukimas**
panašiųjų narių – 45
- Šaknis**
aritmetinė – 35
daugianario – 49
kvadratinė – 36
kvadratinės lygties – 92
kvadratinio trinario – 49
lygties – 90
nelyginio laipsnio – iš neigiamojos skaičiaus 37
pašalinė lygties – 95
- Taisyklė**
lygiagretainio – 228
trikampio – 227
- Tangentas** 142
- Tapatybė** 44

**Taškai**

- , esantys skirtingose taško pusėse 165
- , esantys vienoje taško pusėje 165
- , kurių neskiria taškas 165
- , priklausantys skirtingoms pusplokštumėms 168
- , priklausantys tiesei 162
- , priklausantys vienai pusplokštumei 168

Taškas

- apskritimo lietimosi – 178
- , esantis tarp dviejų taškų 165
- , simetriškas taškui taško atžvilgiu 217
- , simetriškas taškui tiesės atžvilgiu 218
- tiesei nepriklausantis – 162
- tiesei priklausantis – 162
- tiesių susikirtimo – 162

Teorema 162

- Pitagoro – 184
- Talio – 174
- Vieto – 93

Tiesė 161

- koordinatų – 26
- per tašką einanti – 162
- per tašką neinanti – 162
- skaičių – 29

Tiesės

- susikertančiosios – 162
- lygiagrečiosios – 173
- statmenosios – 176

Tyrimas

- dvių tiesinių lygių su dviem kintamaisiais sistemos – 114

Transformacija

- figūrų – 217
- panašumo – 222

Trapecija 197

- lygiašonė – 197

Traukimas

- kvadratinės šaknies – iš natūraliojo skaičiaus 40

Trikampiai

- lygieji – 181
- panašieji – 223

Trikampis 178

- apibrėžtas apie apskritimą – 186
- įbrėžtas į apskritimą – 186
- lygiakraštis – 182
- lygiašonis – 182
- statusis – 183

Trinaris

- kvadratinis – 49

Trupmena

- begalinė dešimtainė – 24
- begalinė dešimtainė periodinė – 25

dešimtainė – 19

- grynoji begalinė dešimtainė periodinė – 25
- mišrioji begalinė dešimtainė periodinė – 25
- nesuprastinamoji – 16
- netaisyklingoji – 15
- paprastoji – 15
- racionalioji – 50
- taisyklingoji – 15

Tvarka

- aritmetinių veiksmų – 10

Uždaviniai

- brėžimo – 188

Vardiklis

- geometrinės progresijos – 137
- paprastųjų trupmenų bendrasis – 17
- paprastųjų trupmenų mažiausiasis bendrasis – 17
- racionaliųjų trupmenų bendrasis – 51
- trupmenos – 15

Vektoriai

- kolinearieji – 229
- priešpriešiai – 226
- vienakrypčiai – 226

Vektorius 225

- nulinis – 226
- vienetinis – 229

Vertimas

- begalinės dešimtainės periodinės trupmenos – paprastąja 25

Vidurkis

- dvių skaičių aritmetinis – 132
- dvių skaičių geometrinis – 132, 206
- dvių skaičių proporcinis – 206

Vienanaris 44**Vienetas**

- kampų matavimo – 169
- plotų matavimo – 232

Viršūnė

- daugiakampio – 199
- kampo – 168
- keturkampio – 193
- laužtės – 198
- parabolės – 87
- trikampio – 178

Viršūnės

- gretimosios keturkampio – 193
- priešingosios keturkampio – 194

Ženklas

- apytikslės lygybės – 38
- griežtosios nelygybės – 29
- negriežtosios nelygybės – 29

Mokymo priemonė
Gusevas Valerijus, Mordkovičius Aleksandras

МАТЕМАТИКА

Informacinė medžiaga
Mokymo priemonė mokiniams

Redakcijos vedėja *J. Baltušnikienė*. Redaktorė *N. Ramanauskienė*
Viršelįs *A. Gelgotė*. Men. redaktorė *D. Vitkevičienė*
Techn. redaktorė *I. Kondreckienė*. Korektorė *J. Grybinaitė*
Vertimą recenzavo filologijos mokslų kandidatas **Alvydas Butkus**

Учебное пособие
Гусев Валерий Александрович, Мордкович Александр Григорьевич

МАТЕМАТИКА

Справочные материалы
Учебное пособие для учащихся
Перевел с русского **Юозас Мачис**
Оригинал рекомендован Главным управлением школ
Министерства просвещения СССР
На литовском языке
Литовская ССР, 233000, Каунас, пр. Витавто, 25, изд-во «Швнеса»

ИБ № 6875

Duota rinkti 1989 02 22. Pasirašyta spaudai
1989 12 07. Formatas 60x90/16. Popierius of-
setinis Nr. 1. Garnitūra „Literatūrinė“, 10
punktų. Ofsetinė spauda. 16+0,3 priešl. sąl.
sp. 1. 13,7+0,41 priešl. apsk. leid. 1. Tir.
25 000 egz. Užsakymas 3763. Leid. Nr. 11660.

Kaina 60 kp.
„Sviesos“ I-kl., 233000 Kaunas, Vytauto pr. 25
Rinko „Spindulio“ sp., 233000 Kaunas, Gedi-
mino 10
Spausdino „Aušros“ sp., 233000 Kaunas, Vy-
tauto pr. 23